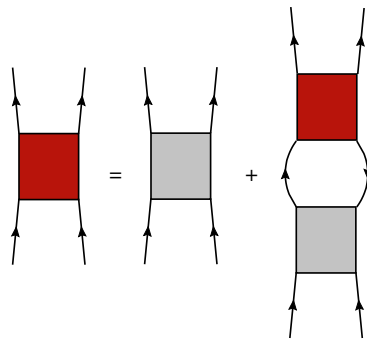

Quantentheorie relativistischer Vielteilchensysteme



Hendrik van Hees
Institut für Theoretische Physik
Justus-Liebig-Universität Gießen
Hendrik.vanHees@theo.physik.uni-giessen.de

24. August 2010

Vorwort

Dieses Vorlesungsskript behandelt die relativistische Vielteilchenphysik im Rahmen der Quantenfeldtheorie, wobei wir uns vornehmlich auf den Fall des **thermodynamischen Gleichgewichts** konzentrieren. Die Hauptanwendungsgebiete dieser Theorie liegen in der Hochenergie-Kernphysik (**Schwerionenphysik**), die sowohl die Eigenschaften heißer und/oder dichter hadronischer als auch heißer und/oder dichter partonischer Materie untersucht.

Andere Anwendungen der Theorie sind Modelle für **kompakte Sterne** wie **weiße Zwerge** oder **Neutronensterne** und die Theorie des **elektroschwachen Phasenübergangs** im frühen Universum.

Methodisch werden wir in dieser Vorlesungen von der **Operatorformulierung** ausgehen und die wesentlichen Grundlagen der Quantenfeldtheorie für Vielteilchensysteme im großkanonischen Ensemble behandeln. Dazu rekapitulieren wir in Kap. 1 kurz die allgemeineren Grundlagen der **Statistischen Thermodynamik**. Dieses Kapitel ist weitgehend sowohl für die relativistische als auch die nichtrelativistische Theorie gültig.

In Kap. 2 werden wir die Quantenfelder freier Teilchen aus der Perspektive des Formalismus bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen betrachten und so zur Theorie der **idealen Gase** für Klein-Gordon- und Dirac-Teilchen sowie für Photonen gelangen. Dabei werden wir das elektromagnetische Feld in der nichtkovarianten Coulombbeziehung quantisieren.

Kap. 3 wird der Entwicklung der **Störungstheorie** bei endlichen Temperaturen und Dichten für die QED gewidmet sein. Wie wir sehen werden, erhalten wir dabei im wesentlichen dieselben **Feynman-Diagramm-Regeln** wie für die gewöhnliche „Vakuum-Quantenfeldtheorie“. Wie wir ausführlich besprechen werden, liegen die wesentlichen Unterschiede darin, daß die Theorie bei endlichen Temperaturen und Dichten einer Quantenfeldtheorie für die Zeitentwicklung der Operatoren und Zustände entlang eines **imaginären Zeitintervalls** entspricht. Wir werden diesen **Matsubara-Formalismus** ausführlich besprechen und die dazugehörigen Feynmanregeln herleiten. Für dynamische physikalische Größen wie Transportkoeffizienten (wie Wärme- und elektrische Leitfähigkeit oder den Brechungsindex für em. Wellen) werden allerdings gewöhnliche (retardierte) Greensche Funktionen, die für reelle Zeiten definiert sind, benötigt. Wir werden dazu zeigen, wie man solche Green-Funktionen aus den entsprechenden Matsubara-Funktionen durch analytische Fortsetzung berechnen kann.

Falls es die Zeit erlaubt, werden wir uns dann noch mit der **Pfadintegralformulierung** und **nichtabelschen Eichtheorien** (vornehmlich der Quantenchromodynamik (QCD), die die starke Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen beschreibt) in Kapitel ?? beschäftigen.

Konventionen

Im folgenden verwenden wir stets **natürliche Einheiten**, für die die modifizierte Plancksche Konstante $\hbar = 1$ und die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 1$ gesetzt werden. Als verbliebene Energieeinheit werden wir vornehmlich GeV und als Längeneinheit Fermi ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) verwenden, die in der Hochenergiephysik bequem sind. Zur Umrechnung von Größen in gewöhnlichen (SI-)Einheiten benötigen wir dann nur noch den Umrechnungsfaktor

$$\hbar c \simeq 0.197 \text{ GeV fm.}$$

Bzgl. thermodynamischer Größen verwenden wir auch noch die Konvention, daß die **Boltzmann-Konstante** $k_B = 1$ gesetzt wird. Temperaturen werden also direkt in Energieeinheiten (also MeV oder GeV) gemessen, was wie die Wahl der Energie- und Längeneinheit bequeme Größenordnungen für die relativistische Kernphysik mit Anwendungen auf Schwerionentöße wie sie bei den Schwerionenbeschleunigern SIS (GSI Darmstadt), SPS (CERN Genf), RHIC (Brookhaven National Laboratory, Upton, NY) sowie dem seit neuestem in Betrieb gegangenen LHC (CERN Genf) und der in Planung befindlichen neuen Anlagen FAIR (Darmstadt) und NICA (Dubna) untersucht werden.

Für Minkowski-Raumgrößen (also Vektoren, Tensoren und Spinoren) werden wir die „Westküstenkonvention“, für die die Pseudometrik $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ist, verwenden.

In der **(Quanten-)Elektrodynamik** verwenden wir die für die relativistische Theorie besonders angepaßten rationalisierten **Heaviside-Lorentz-Einheiten**. In diesen Einheiten lautet das Coulombsche Gesetz für das Kräftepotential zwischen zwei Punktladungen

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi r},$$

wo q_1 und q_2 die Ladungen und r den Abstand der beiden Punktteilchen bezeichnen. Die Elementarladung bezeichnen wir mit $e > 0$, so daß ein Proton oder Positron die Ladung $+e$ und ein Antiproton oder Elektron die Ladung $-e$ tragen. Den Zahlenwert in unseren natürlichen Heaviside-Lorentz-Einheiten erhalten wir aus dem Zusammenhang mit der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}.$$

Bzgl. Literatur sei auf die folgenden grundlegenden Lehrbücher verwiesen:

Relativistische Quantenfeldtheorie (QFT): [Wei95, Wei96] (dieses verwendet leider die „Ostküstenmetrik“; also ist bzgl. der Vorzeichen Vorsicht beim Vergleichen mit Formeln mit denen in diesem Skript geboten), [PS95, BL86].

Relativistische QFT bei endlichen Temperaturen und/oder Dichten: [KG06, LeB96] (das letztere Buch behandelt auch den sogenannten **real-time-Formalismus**, der aber erst für Anwendungen auf **Nichtgleichgewichtssituationen** notwendig ist).

Inhaltsverzeichnis

1	Erinnerung an die Statistische Thermodynamik	9
1.1	Gemischte Zustände	9
1.2	Die Bewegungsgleichung für den Statistischen Operator	11
1.3	Die Entropie	12
1.4	Das großkanonische Ensemble	13
1.5	Phänomenologische Thermodynamik	15
1.6	Legendre-Transformationen thermodynamischer Potentiale	16
1.7	Zum Transformationsverhalten thermodynamischer Größen	18
2	Thermische Quantenfeldtheorie freier Teilchen	21
2.1	Poincaréinvarianz	21
2.2	Lagrange- und Hamiltonformalismus für Felder	23
2.3	Quantisierung des freien Klein-Gordon Feldes	26
2.4	Ideales Bose-Gas	30
2.5	Geladene Klein-Gordon-Teilchen	33
2.6	Das freie Dirac-Feld	36
2.7	Quantisierung des freien Dirac-Feldes	43
2.8	Ideale Fermigase	46
2.9	Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes	48
2.10	Hohlraumstrahlung	52
3	Wechselwirkende Quantenfelder	55
3.1	Das lineare σ -Modell	55
3.2	Matsubara-Feynman-Diagramme	64
3.3	Die Feynmanregeln im Impulsraum	71
3.4	Effektive Wirkung	77
3.5	Bose-Einstein-Kondensation als spontane Symmetriebrechung	80
3.5.1	Freie Teilchen	81
3.5.2	Wechselwirkende Teilchen	82
3.6	Das Goldstone-Theorem	83
4	Abelsche Eichtheorien: QED	85

Inhaltsverzeichnis

4.1	Klassische Elektrodynamik als Eichtheorie	85
4.2	Spinor-QED in Coulombbeziehung	89
4.3	Lineare Antworttheorie	94
4.3.1	Erinnerung an die phänomenologische klassische Elektrodynamik	94
4.3.2	Quantenfeldtheoretische Formulierung	101
4.4	Analytische Eigenschaften Greenscher Funktionen	104
4.4.1	Skalare Teilchen	104
4.4.2	Dirac-Fermionen	108
4.4.3	Der Photonenpropagator	110
4.5	Die Photonenselbstenergie in Einschleifennäherung	114
4.5.1	Der Vakuum-Anteil und Renormierung	117
4.5.2	Der Medium-Anteil	121
4.6	Physikalische Anwendungen	121
A	Das Noether-Theorem für klassische Feldtheorien	123
A.1	Poincaré-Symmetrie	123
A.2	Globale Eichsymmetrie	125
B	Integrale und Reihen	127
B.1	Integrale zu masselosen idealen Gasen	127
C	Dimensionale Regularisierung	131
C.1	Die Grundformeln zur dimensional Regularisierung	131
C.1.1	Standard-Feynman-Integrale	132
C.1.2	Laurententwicklung der Γ -Funktion	132
C.1.3	Feynmans Parametrisierung	133
C.2	Austauschdiagramme	133
C.3	Austauschdiagramme mit $m_1 = m_2 = m$	135
C.4	Austauschdiagramme mit $m_1 = 0$	136
C.5	Tadpoles	137
	Literaturverzeichnis	141

Kapitel 1

Erinnerung an die Statistische Thermodynamik

In diesem Kapitel fassen wir kurz die wesentlichen Grundlagen der statistischen Thermodynamik zusammen, wobei wir uns auf **Gleichgewichtszustände** und das **großkanonische Ensemble** beschränken. Wesentlich für die Thermodynamik ist der Begriff der **Entropie**, die wir hier über die **von Neumann-Entropie** des Statistischen Operators einführen. Ein tieferes Verständnis der Entropie liefert die **Informationstheorie**, die aus der statistischen Signaltheorie hervorgegangen ist, wo der informationstheoretische Entropiebegriff von **Shannon** eingeführt wurde. Dieses Konzept wurde dann von **Jaynes** auf die Quantentheorie angewandt. Einführungen zum informationstheoretischen Zugang zur statistischen Physik bieten [Jay57a, Jay57b, Kat67, Hob87, Hee08].

1.1 Gemischte Zustände

Im Rahmen der Quantentheorie läßt sich ein System nicht genauer determinieren als es durch seine Präparation in einem durch einen normierten Zustandsvektor $|\psi\rangle$ repräsentierten Zustand möglich ist. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß man ihn zur Zeit $t = 0$ in einem simultanen Eigenzustand eines vollständigen Satzes kompatibler Observabler präpariert. Die physikalische Bedeutung dieser vollständigst möglichen Festlegung des Systemzustandes ist allerdings allein durch den **statistischen Gehalt des Zustandsvektors** gemäß der Bornschen Formel

$$P(a) = \sum_{\alpha} |\langle a, \alpha | \psi \rangle|^2 \quad (1.1.1)$$

gegeben. Dabei sollen die Vektoren $|a, \alpha\rangle$ Eigenvektoren des die Observable A repräsentierenden selbst-adjungierten Operators A zum Eigenwert a sein. Die Variable α zählt im Falle von Entartung die Eigenzustände zu diesem Eigenwert a durch. Wir haben auch vorausgesetzt, daß die Vektoren $|a, \alpha\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, d.h. daß

$$\langle a, \alpha | a', \alpha' \rangle = \delta_{aa'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (1.1.2)$$

ist.

Selbst bei vollständiger Präparation des Systems sind somit nicht die Werte aller Observabler festgelegt, sondern nur derjenigen Observablen, die ihrerseits mit den Observablen des vollständigen Satzes kompatibler Observabler kompatibel sind. Die Quantentheorie ist eine **statistische Beschreibung** der Realität, und die Notwendigkeit einer statistischen Beschreibung rührt nicht von unserer mangelnden Kenntnis über den Systemzustand her, sondern ist prinzipieller Natur: Der Quantentheorie zufolge

können eben keine zwei nichtkompatiblen Observablen simultan wohlbestimmte Werte besitzen. Die Unbestimmtheit der einen Observable bei Festlegung der anderen ist also unvermeidlich.

In vielen Fällen werden wir aber noch nicht einmal volle Kenntnis vom Systemzustand besitzen, d.h. wir haben i.a. das System gar nicht in einem durch einen Zustandsvektor ψ repräsentierten Zustand¹ präpariert. In solchen Fällen kann man aber immer noch „**Quantenstatistik**“ betreiben, d.h. eine statistische Beschreibung im gleichen Sinne wie in der **klassischen Statistischen Mechanik** vornehmen. Diese statistische Beschreibung ist nun von der quantenmechanischen Statistik eines reinen Zustandes qualitativ verschieden, denn es handelt sich um eine statistische Beschreibung aufgrund einer unvollständigen Kenntnis des Systemzustandes, während die statistischen Eigenschaften des reinen Zustandes prinzipiell nicht durch genauere Präparation des Systems beseitigt werden können.

Wenden wir uns also der Frage zu, wie man das System im Falle nicht vollständig vorgenommener Präparation quantenstatistisch beschreiben kann. Eine typische Präparation dieser Art können wir uns folgendermaßen vorstellen: Nehmen wir an, wir könnten Teilchen in reinen Zuständen $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ präparieren, z.B. durch Festlegung der Werte eines vollständigen Satzes kompatibler Observabler. Diese Sätze von kompatiblen Observablen können dabei aber für jeden dieser reinen Zustände durchaus unterschiedlich sein. Insbesondere können sie auch untereinander inkompatibel sein!

Jedem dieser reinen Zustände entspricht nach der Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation ein Ensemble von voneinander unabhängig immer gleichartig präparierten Teilchen, wobei der reine Zustand durch den jeweiligen Zustandsvektor $|\psi_j\rangle$ ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) repräsentiert wird.

Wir können nun ein **gemischtes Ensemble** (kurz ein **Gemisch**) erzeugen, indem wir einem Experimentator zufällig (und unkorreliert) immer jeweils Teilchen von irgendeinem dieser reinen Zustände schicken, und zwar mit der Wahrscheinlichkeit $P_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n P_j = 1$, ein im reinen Zustand $|\psi_j\rangle$ präpariertes Teilchen. Welche statistischen Eigenschaften wird dieser Experimentator dann feststellen? Diese Frage behandelt die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie. Angenommen der Experimentator mißt irgendeine Observable A . Vorausgesetzt das Teilchen stammt aus dem zum reinen Zustand $|\psi_j\rangle$ gehörigen Ensemble. Dann wäre die Wahrscheinlichkeit, einen möglichen Meßwert a zu messen, durch (1.1.1) gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen tatsächlich aus diesem Ensemble stammt, ist nun voraussetzungsgemäß P_j . Da wir voraussetzen, daß die Teilchen unkorreliert, d.h. **stochastisch unabhängig** voneinander aus jeweils einem der n Ensembles stammen, ist für den Experimentator die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von A den Meßwert a zu finden, durch

$$P(a) = \sum_{j=1}^n P_j \omega_{\psi_j}(a) = \sum_{j=1}^n P_j \sum_{\alpha} \langle a, \alpha | \psi_j \rangle \langle \psi_j | a, \alpha \rangle \quad (1.1.3)$$

gegeben.

Dies führt uns dazu, dem Gemisch den **Statistischen Operator**

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n P_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j| = \sum_{j=1}^n P_j \mathbf{P}_{\psi_j} \quad (1.1.4)$$

zuzuordnen. Ein reiner Zustand ist in dieser Formulierung offenbar genau dann gegeben, wenn der Präparator dem Experimentator jedesmal ein Teilchen, das in genau einem Zustand $|\psi_1\rangle$ präpariert ist, zukommen läßt. Dann ist $P_1 = 1$ und $P_j = 0$ für $j \geq 2$, und der **Statistische Operator des reinen**

¹Solche Zustände des Systems werden in diesem Zusammenhang auch genauer als **reine Zustände** bezeichnet.

Zustandes folglich durch den **Projektionsoperator**

$$\mathbf{P}_{\psi_1} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \quad (1.1.5)$$

gegeben.

Setzen wir (1.1.4) in (1.1.3) ein, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, beim Messen der Observablen A den Wert a zu finden,

$$P(a) = \sum_{\alpha} \langle a, \alpha | \mathbf{R} | a, \alpha \rangle. \quad (1.1.6)$$

Diese Gleichung ist offenbar auch für einen reinen Zustand korrekt, d.h. mit der Bornschen Formel (1.1.1) kompatibel, wenn wir (1.1.5) als Statistischen Operator verwenden:

$$\langle a | \mathbf{P}_{\psi_1} \rangle = \langle a | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | a \rangle = w_{\psi_1}(a). \quad (1.1.7)$$

Der Statistische Operator ist offensichtlich **selbstadjungiert**, und die Wahrscheinlichkeiten sind positiv semidefinit. Summieren bzw. integrieren wir die Wahrscheinlichkeiten über ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) von Eigenvektoren von \mathbf{A} , erhalten wir

$$\sum_a P(a) = \sum_{j=1}^n P_j = 1, \quad (1.1.8)$$

wie es sein muß, denn wir wissen, daß jedes Teilchen des Gemisches, das durch \mathbf{R} beschrieben wird, aus einem der Ensembles, die durch die reinen Zustände $|\psi_j\rangle$ beschrieben werden, stammt und daß man bei der Messung von A mit Sicherheit einen Eigenwert a des dazugehörigen Operators \mathbf{A} findet. Für den Erwartungswert einer beliebigen Funktion $f(\mathbf{A})$ ergibt sich

$$\langle f(\mathbf{A}) \rangle = \sum_a f(a) P(a) = \sum_{a, \alpha} \langle a, \alpha | \mathbf{R} f(\mathbf{A}) | a, \alpha \rangle = \text{Tr}[\mathbf{R}(t) f(\mathbf{A})]. \quad (1.1.9)$$

Dabei ist die Spur eines Operators definiert als

$$\text{Tr } \mathbf{B} = \sum_k \langle u_k | \mathbf{B} | u_k \rangle, \quad (1.1.10)$$

wobei $\{|u_k\rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein beliebiges VONS bezeichnet. Man kann leicht nachweisen (Übung!), daß die Spur unabhängig von dem in dieser Definition benutzten VONS $\{|u_k\rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Außerdem gilt (unabhängig davon, ob die Operatoren \mathbf{A} und \mathbf{B} kommutieren oder nicht)

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA}). \quad (1.1.11)$$

1.2 Die Bewegungsgleichung für den Statistischen Operator

Wir arbeiten im folgenden im **Heisenberg-Bild** der quantenmechanischen Zeitentwicklung, da sich dieses im nächsten Kapitel als besonders bequem für die relativistische Quantenfeldtheorie erweisen wird. Dieses Bild zeichnet sich dadurch aus, daß sich **Observablenoperatoren** gemäß der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \frac{1}{i} [\mathbf{A}(t), \mathbf{H}], \quad (1.2.1)$$

wobei \mathbf{H} der vollständige (nicht explizit von der Zeit abhängige) **Hamiltonoperator** des Systems ist. Diese Gleichung wird offensichtlich durch

$$\mathbf{A}(t) = \exp(it\mathbf{H})\mathbf{A}(0)\exp(-it\mathbf{H}) \quad (1.2.2)$$

gelöst, wie man durch Ableiten nach der Zeit unmittelbar nachweist. Entsprechend folgt für die Eigenvektoren

$$\mathbf{A}(t)|a, t\rangle = a|a, t\rangle \Rightarrow |a, t\rangle = \exp(it\mathbf{H})|a, 0\rangle. \quad (1.2.3)$$

Die Zustandsvektoren sind zeitunabhängig, d.h. $|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle = \text{const.}$ Entsprechend ist der Statistische Operator gemäß (1.1.4) zeitunabhängig, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = 0. \quad (1.2.4)$$

Denkt man sich den Statistischen Operator als Funktion von (nicht explizit zeitabhängigen) Observablenoperatoren und evtl. explizit der Zeit dargestellt, d.h. $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n; t)$, so folgt daraus die **von Neumann-Gleichung**

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{i}[\mathbf{R}, \mathbf{A}] + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R} = 0, \quad (1.2.5)$$

wobei die partielle Zeitableitung der expliziten Zeitabhängigkeit des Statistischen Operators Rechnung trägt.

Für die Zeitabhängigkeit von Erwartungswerten (evtl. explizit zeitabhängiger) Observabler $O(t)$ folgt

$$\frac{d}{dt}\langle O(t) \rangle = \text{Tr} \left[\frac{d\mathbf{O}}{dt}\mathbf{R}(t) + \mathbf{O}(t)\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right] \stackrel{(1.2.5)}{=} \text{Tr} \left[\frac{d\mathbf{O}}{dt}\mathbf{R}(t) \right] = \left\langle \frac{dO(t)}{dt} \right\rangle. \quad (1.2.6)$$

Dies ist das **Ehrenfestsche Theorem** (geschrieben im Heisenbergbild! Eine bildunabhängige Formulierung der Quantentheorie findet man in [Fic79]).

1.3 Die Entropie

Die Entropie wird nach **von Neumann** als Funktional des Statistischen Operators eines Systems durch

$$S[\mathbf{R}] = -\langle \ln \mathbf{R} \rangle_{\mathbf{R}} = -\text{Tr}[\mathbf{R} \ln \mathbf{R}] \quad (1.3.1)$$

definiert und ist ein **Maß für die fehlende Information** über den Systemzustand bei gegebenem Statistischen Operator. Wir wollen diese Interpretation als **Informationsmaß** in dieser Vorlesung nicht genauer begründen. Wir bemerken nur, daß für einen reinen Zustand $\mathbf{R}_{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|$

$$S[\mathbf{R}_{\psi}] = 0 \quad (1.3.2)$$

ist. Dabei verwenden wir bei der Spurbildung in der Entropieformel für den Fall, daß für einen normierten Vektor $|n\rangle$ das Matrixelement $R_{nn} = \langle n|\mathbf{R}|n\rangle = 0$ ist

$$\lim_{R_{nn} \rightarrow 0^+} R_{nn} \ln R_{nn} = 0. \quad (1.3.3)$$

1.4 · Das großkanonische Ensemble

Zur Berechnung von (1.3.2) denken wir uns ein Orthonormalsystem $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|1\rangle = |\psi\rangle$ gegeben. Dann ist $R_{\psi,11} = 1$ und $R_{\psi,nn} = 0$ für $n \geq 2$. Mit dem Grenzwert (1.3.3) erhalten wir dann

$$S[\mathbf{R}_\psi] = - \sum_{n=1}^{\infty} R_{\psi,nn} \ln R_{\psi,nn} = -1 \cdot \ln 1 = 0. \quad (1.3.4)$$

Die Kenntnis eines reinen Zustands ist also in diesem Sinne vollständig, wie es für die Quantentheorie sein muß. Allgemein können wir bei der Spurbildung als VONS die Eigenvektoren $|n\rangle$ des Statistischen Operators verwenden²

$$S[\mathbf{R}] = - \sum_{n=1}^{\infty} R_{nn} \ln R_{nn}. \quad (1.3.5)$$

Da \mathbf{R} ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Operator mit

$$\text{Tr } \mathbf{R} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{nn} = 1 \quad \text{mit} \quad R_{nn} \geq 0 \quad (1.3.6)$$

ist, muß $0 \leq R_{nn} \leq 1$ sein. Dies ergibt sich auch daraus, daß R_{nn} die Wahrscheinlichkeit dafür ist, bei einer Messung eines geeigneten vollständigen Satzes kompatibler Observabler, für die $|n\rangle$ ein Eigensystem ist, das System im Zustand $|n\rangle$ vorzufinden. Jedenfalls folgt aus (1.3.6) wegen $\ln x < 0$ für $x < 1$, daß

$$S[\mathbf{R}] \geq 0 \quad (1.3.7)$$

ist.

Nach dem **Prinzip vom geringsten Vorurteil** müssen wir nun denjenigen Statistischen Operator wählen, der unter Berücksichtigung der vorliegenden Information die **maximale Entropie** ergibt.

1.4 Das großkanonische Ensemble

In dieser Vorlesung werden wir ausschließlich die **großkanonische Beschreibung** thermodynamischer Systeme verwenden, da diese für praktische Probleme am einfachsten zu handhaben ist und die wesentlichen Aspekte der Beschreibung **makroskopischer Systeme** abdeckt. Das paradigmatische Beispiel für diese Beschreibung ist ein Gas oder Plasma in einem Behälter. Dabei greift man sich ein sehr großes Teilvolumen dieses Behälters heraus, so daß die darin enthaltenen Gasteilchen (also Atome, Moleküle oder Ionen) mit den übrigen Gasteilchen und mit den Behälterwänden Energie austauschen können. Zugleich liegt auch die Teilchenzahl in dem Teilvolumen nicht exakt fest, denn es können sich Teilchen aus dem Teilvolumen heraus- oder in es hineinbewegen.

Wegen der von Neumann-Gleichung (1.2.5) liegt genau dann ein stationärer Zustand vor, d.h.

$$\partial \mathbf{R} / \partial t = 0, \quad \text{wenn} \quad [\mathbf{R}, \mathbf{H}] = 0 \quad (1.4.1)$$

ist. Ein Statistischer Operator beschreibt also genau dann einen **stationären Zustand**, wenn er eine Funktion der **Erhaltungsgrößen des Systems** ist und nicht explizit von der Zeit abhängt. Für das großkanonische Ensemble betrachtet man die **Energie und eine erhaltene Ladung** Q^3 als die für

²Wir schreiben im folgenden die Formeln für den Fall, daß der Statistische Operator ein rein diskretes Spektrum besitzt. Für den Fall, daß er auch kontinuierliche Eigenwerte besitzt, ist entsprechend zu integrieren.

³Die Verallgemeinerung auf mehrere erhaltene Ladungen ist kein größeres Problem.

die Beschreibung wichtigen Erhaltungsgrößen⁴. Allerdings betrachten wir ja nur ein Teilvolumen eines größeren Gesamtvolumens eines Gases, und da muß die Energie und die betrachtete Ladung nicht exakt erhalten sein. Im **Gleichgewichtszustand** dürfen wir aber erwarten, daß es keinen makroskopischen Energie- und Teilchenfluß geben wird, d.h. im Mittel über nicht zu kleine Volumen wird die Gesamtenergie und Teilchenzahl der in dem betrachteten Volumen enthaltenen Teilchen konstant sein, und wir geben die **mittlere Energie und die mittlere Ladung** als bekannte Größen vor.

Nach dem Prinzip vom geringsten Vorurteil suchen wir also denjenigen Statistischen Operator \mathbf{R} , für den die Entropie (1.3.1) maximal wird, wobei die Einschränkungen

$$\text{Tr } \mathbf{R} \stackrel{!}{=} 1, \quad \langle \mathbf{H} \rangle = \text{Tr } \mathbf{H} \mathbf{R} \stackrel{!}{=} U, \quad \langle \mathbf{Q} \rangle = \text{Tr } (\mathbf{Q} \mathbf{R}) \stackrel{!}{=} Q \quad (1.4.2)$$

erfüllt sein müssen. Eine solche Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen löst man bekanntlich mit Hilfe der Methode der **Lagrange-Parameter**, d.h. wir betrachten das Funktional

$$S'[\mathbf{R}] = S[\mathbf{R}] - \langle (\Phi - 1)\mathbb{1} + \beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q} \rangle = -\text{Tr} \{ \mathbf{R} [\ln \mathbf{R} + (\Phi - 1)\mathbb{1} + \beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q}] \}. \quad (1.4.3)$$

Dabei sind Φ , β und α die Lagrangeparameter, die so zu bestimmen sind, daß die drei Zwangsbedingungen (1.4.2) erfüllt sind. Wir suchen nun denjenigen Statistischen Operator \mathbf{R} , für den $S'[\mathbf{R}]$ maximal wird. Dazu variieren wir (1.4.3) nach \mathbf{R} , wobei wir uns Dank der Lagrange-Parameter nicht mehr um die Nebenbedingungen zu kümmern brauchen:

$$\begin{aligned} \delta S'[\mathbf{R}] &= -\text{Tr} [(\ln \mathbf{R} + (\Phi - 1)\mathbb{1} + \beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q} + \mathbb{1})\delta \mathbf{R}] \\ &= -\text{Tr} [(\ln \mathbf{R} + \Phi\mathbb{1} + \beta\mathbf{H} + \alpha\mathbf{Q})\delta \mathbf{R}] \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Da $\delta \mathbf{R}$ beliebig ist, muß die Klammer verschwinden, und daraus folgt

$$\mathbf{R} = \exp(-\Phi\mathbb{1} - \beta\mathbf{H} - \alpha\mathbf{Q}). \quad (1.4.5)$$

Es gilt

$$\text{Tr } \mathbf{R} = \exp(-\Phi) \text{Tr} [\exp(-\beta\mathbf{H} - \alpha\mathbf{Q})] = \exp(-\Phi) Z(\beta, \alpha) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \Phi = \ln Z. \quad (1.4.6)$$

Die Größe

$$Z = \text{Tr} [\exp(-\beta\mathbf{H} - \alpha\mathbf{Q})] \quad (1.4.7)$$

heißt **großkanonische Zustandssumme** und $\Phi = \ln Z$ **großkanonisches thermodynamisches Potential**. Es ist klar, daß die thermodynamischen Größen im allgemeinen noch von **äußeren Systemparametern** abhängen werden, die in den obigen Formalismus über den Hamiltonoperator und den Ladungsoperator oder auch durch Randbedingungen eingehen. Ein wichtiges Beispiel für den letzteren Fall ist das betrachtete **Volumen** V , das durch geeignete Randbedingungen an die Wellenfunktionen in der Ortsdarstellung beschrieben wird. Darauf gehen wir im nächsten Kapitel konkret ein. Für die jetzt folgenden allgemeineren Betrachtungen, genügt es, einfach davon auszugehen, daß die thermodynamischen Größen auch vom Volumen abhängen.

⁴Man kann in der relativistischen Physik nicht die Gesamtteilchenzahl in einem Gleichgewichtsensemble verwenden, da diese i.a. nicht erhalten ist, denn es können bei hinreichend hoher Temperatur stets Teilchen-Antiteilchenpaare erzeugt und vernichtet werden, so daß die Teilchenzahl für eine Teilchenspezies des betrachteten Systems i.a. nicht konstant sein wird. Dafür sind aber bestimmte Ladungen, z.B. die elektrische Ladung oder die Netto-Baryonenzahl (im Standardmodell der Elementarteilchen) erhalten.

Die großkanonische Zustandssumme (1.4.7) ist deshalb äußerst nützlich, weil wir bei ihrer Kenntnis sofort die mittlere Energie und die mittlere Ladung ausrechnen können. Da die Teilchenzahl voraussetzungsgemäß eine Erhaltungsgröße ist, muß $[\mathbf{Q}, \mathbf{H}] = 0$ sein, und wir können die Ableitungen nach den Lagrangeparametern bilden, als wären \mathbf{H} und \mathbf{Q} Zahlen, d.h. es ist

$$\frac{\partial}{\partial \beta} Z(\beta, \alpha, V) = -\text{Tr}[\mathbf{H} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q})] = -Z(\beta, \alpha, V) \langle H \rangle = -Z(\beta, \alpha, V) U(\beta, \alpha, V). \quad (1.4.8)$$

Also ist

$$U(\beta, \alpha, V) = -\frac{1}{Z(\beta, \alpha, V)} \frac{\partial}{\partial \beta} Z(\beta, \alpha, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta, \alpha, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \Phi(\beta, \alpha, V). \quad (1.4.9)$$

Genauso folgt

$$Q(\beta, \alpha, V) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi(\beta, \alpha, V). \quad (1.4.10)$$

Wir geben schließlich noch die Entropie für den großkanonischen Gleichgewichtsoperator (1.4.5) an:

$$\begin{aligned} S(\beta, \alpha, V) &= -\text{Tr}(\mathbf{R} \ln \mathbf{R}) = \Phi + \langle \beta \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} \rangle \\ &= \Phi(\beta, \alpha, V) + \beta U(\beta, \alpha, V) + \alpha Q(\beta, \alpha, V). \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

1.5 Phänomenologische Thermodynamik

Um den Anschluß der großkanonischen Größen an die üblichen Größen der phänomenologischen Thermodynamik zu finden, gehen wir vom **ersten Hauptsatz der Thermodynamik** aus, demzufolge eine infinitesimale Zustandsänderung zur Änderung der inneren Energie

$$dU = T dS - p dV + \mu dQ \quad (1.5.1)$$

führt, wobei T die Temperatur, p den Druck und μ das thermodynamische Potential des Systems bezeichnen. Dies lösen wir nach

$$dS = \frac{1}{T} (dU + p dV - \mu dQ) \quad (1.5.2)$$

auf. Die „natürlichen unabhängigen Variablen“ für die Entropie sind also U , V und Q , und es gelten die thermodynamischen Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial U} S(U, V, Q) = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial}{\partial V} S(U, V, Q) = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial}{\partial Q} S(U, V, Q) = -\frac{\mu}{T}. \quad (1.5.3)$$

Vergleichen wir nun (1.5.2) mit (1.4.11). Dazu bilden wir das totale Differential dieser Gleichung, wobei wir zunächst β , α und V als unabhängige Variablen zu verwenden haben. Dann folgt unter Berücksichtigung von (1.4.9) und (1.4.10) nach einigen Zusammenfassungen

$$dS = \left[\beta dU + \alpha dQ + dV \frac{\partial}{\partial V} \Phi(\beta, \alpha, V) \right]. \quad (1.5.4)$$

Vergleichen wir (1.5.4) mit (1.5.2), erhalten wir die Beziehungen

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad \alpha = -\frac{\mu}{T}, \quad \frac{\partial}{\partial V} \Phi(\beta, \alpha, V) = \frac{p}{T}. \quad (1.5.5)$$

Eine typische Berechnung der **Zustandsgleichungen** eines Systems mit Hilfe des großkanonischen Formalismus besteht also darin, zunächst die Zustandssumme Z bzw. das kanonische Potential Φ als Funktion von β , α und V zu berechnen. Dadurch sind U , N und S gemäß (1.4.9-1.4.11) als Funktion dieser großkanonischen unabhängigen Variablen bestimmt. Über (1.5.5) gewinnen wir dann die phänomenologischen Größen.

Daraus folgen dann alle übrigen thermodynamisch interessanten Größen. Dies erkennen wir, indem wir uns der physikalischen Interpretation des ersten Hauptsatzes (1.5.1) erinnern. Demnach ändert sich die innere Energie durch Änderung der Entropie, des Volumens und der Teilchen entsprechend der drei Terme im totalen Differential (1.5.1). Der erste Term bedeutet dabei die Zu- bzw. Abfuhr von **Wärmeenergie** $\delta Q = TdS$ zum System bzw. aus dem System, der zweite die mechanische Arbeit $\delta W = -pdV$ und schließlich der dritte die Energieänderung aufgrund der Hinzufügung oder Entnahme der betrachteten erhaltenen Ladung in das System bzw. aus dem System. Dies entspricht auch **Transportgrößen** im Gleichgewichtslimes, nämlich dem Fluß von Wärme, mechanischer bzw. chemischer Energie. Dabei muß man sich allerdings die Zustandsänderungen so langsam ausgeführt vorstellen, daß das System sich stets im Gleichgewicht befindet, bzw. man führt die Zustandsänderung aus und wartet hinreichend lange, so daß sich das Gleichgewicht für die neue Situation einstellt und betrachtet die Änderung der betreffenden Energieanteile zur Gesamtenergieänderung erst nach dieser Einstellung des neuen Gleichgewichts.

Eine interessante Größe ist auch die **Wärmekapazität**, die die Energie angibt, die man pro Teilchen benötigt, um dem System unter bestimmten Nebenbedingungen Wärme zuzuführen, um die Temperatur um einen bestimmten Betrag zu ändern. Gemäß (1.5.1) ist die innere Energie $U(S, V, Q)$ das geeignete thermodynamische Potential, um die Wärmekapazität bei konstant gehaltenem Volumen und Teilchenzahl zu bestimmen:

$$C_{V,Q} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,Q}. \quad (1.5.6)$$

Dabei bedeuten die Indizes an den in Klammern eingeschlossenen partiellen Ableitungen die bei dieser Ableitung konstant zu haltenden Größen. Wir müssen also ggf. die natürlichen unabhängigen Variablen einer Zustandsgröße durch andere ersetzen, um weitere Größen zu erhalten.

1.6 Legendre-Transformationen thermodynamischer Potentiale

Dabei sind andere thermodynamische Potentiale nützlich. Dazu stellen wir zunächst eine allgemeine thermodynamische Betrachtung an. In der Thermodynamik lassen sich die Größen in **Quantitätsgrößen (extensive Variablen)** und **Intensitätsgrößen (intensive Variablen)** unterscheiden. In unseren obigen Betrachtungen waren z.B. U , S und Q extensive und T , p und μ intensive Größen. Halten wir die intensiven Größen konstant und erhöhen die Teilchenzahl N um einen Faktor λ , müssen sich erfahrungsgemäß auch alle übrigen extensiven Größen um denselben Faktor λ ändern. Wir haben also das **Skalenverhalten**

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, Q), \quad (1.6.1)$$

d.h. U als Funktion von extensiven Größen ist eine **homogene Funktion ersten Grades** dieser Größen. Differenzieren wir diese Gleichung nach λ und setzen anschließend $\lambda = 1$ erhalten wir

$$U = S \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,Q} + V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,Q} + Q \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{S,V}. \quad (1.6.2)$$

Der Vergleich mit (1.5.1) liefert andererseits die thermodynamischen Beziehungen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,Q} = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,Q} = -p, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{S,V} = \mu, \quad (1.6.3)$$

und daher folgt aus (1.6.3)

$$U = TS - pV + \mu Q. \quad (1.6.4)$$

Wir können nun weitere thermodynamische Potentiale mit Hilfe der **Legendretransformation** erhalten. Diese hat zum Ziel, an andere natürliche unabhängige Variable angepasste Größen zu erhalten. Führen wir z.B. die **Enthalpie** vermöge

$$H = U + pV \quad (1.6.5)$$

ein so ergibt der erste Hauptsatz (1.5.1)

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp + \mu dQ. \quad (1.6.6)$$

Dies besagt, daß die natürlichen unabhängigen Variablen für die Enthalpie S , p und N sind. Es gelten die thermodynamischen Beziehungen

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p,Q} = T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{S,Q} = V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)_{S,p} = \mu. \quad (1.6.7)$$

Aus der Enthalpie erhalten wir die **Wärmekapazität bei konstantem Druck** zu

$$C_{p,Q} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p,Q}. \quad (1.6.8)$$

Gemäß (1.6.4) gilt noch die Beziehung

$$H = TS + \mu Q. \quad (1.6.9)$$

Die **Helmholtzsche Freie Energie** ist hingegen durch

$$F = U - TS = -pV + \mu Q \quad (1.6.10)$$

definiert. Mit dem ersten Hauptsatz (1.5.1) erhalten wir

$$dF = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV + \mu dQ. \quad (1.6.11)$$

Die natürlichen unabhängigen Variablen sind T , V und N , und es gelten die thermodynamischen Relationen

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,Q} = -S, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,Q} = -p, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,Q} = \mu. \quad (1.6.12)$$

Die **Gibbssche Energie** ist wiederum eine Legendretransformierte der freien Energie

$$G = F + pV = \mu Q. \quad (1.6.13)$$

Mit (1.6.11) erhalten wir

$$dG = dF + pdV + Vdp = -SdT + Vdp + \mu dQ, \quad (1.6.14)$$

d.h. die natürlichen Variablen sind T , p und N . Die dazugehörigen thermodynamischen Relationen lauten

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,Q} = -S, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,Q} = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial Q}\right)_{T,p} = \mu. \quad (1.6.15)$$

Schließlich ergibt sich noch das großkanonische Potential mit etwas umdefinierten unabhängigen Variablen als

$$\Omega = F - \mu Q = -pV. \quad (1.6.16)$$

Verwenden wir wieder (1.6.11), erhalten wir

$$d\Omega = dF - \mu dQ - Nd\mu = -SdT - pdV - Nd\mu. \quad (1.6.17)$$

Die unabhängigen Variablen sind hier T , V und μ , und es gelten die Relationen

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -S, \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} = -p, \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = -Q. \quad (1.6.18)$$

Vergleichen wir dies mit unserer ursprünglichen Definition (1.4.6). Aus (1.4.11) und (1.5.5) folgt

$$U - \mu Q + T\Phi = TS, \quad (1.6.19)$$

und daher

$$-T\Phi = U - TS - \mu Q = F - \mu Q \stackrel{(1.6.16)}{=} \Omega. \quad (1.6.20)$$

In die ursprünglichen statistischen Variablen geschrieben ist also wegen (1.6.16)

$$p = -\frac{\Omega}{V} = \frac{T\Phi}{V} = \frac{\Phi(\beta, \alpha, V)}{\beta V}. \quad (1.6.21)$$

Das großkanonische Potential liefert also auch unmittelbar die **Zustandsgleichung des Systems**.

1.7 Zum Transformationsverhalten thermodynamischer Größen

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen über das Transformationsverhalten thermodynamischer Größen bzgl. Lorentztransformationen angebracht, da über dieses Thema eine verwirrende Fülle unterschiedlicher Betrachtungen in der Literatur existieren, die (übrigens wie auch der unglückliche Begriff der „bewegten Masse“ für den Ausdruck $m/\sqrt{1-v^2}$ etc.) auf Mißverständnisse aus der Frühzeit der Relativitätstheorie zurückzuführen sind. Wir folgen hier der modernen Sichtweise, die nicht zuletzt auch deshalb gerechtfertigt erscheint, weil die damit zusammenhängende **Definition** der thermodynamischen Größen auch auf die **Allgemeine Relativitätstheorie** anwendbar ist, was nur gelingt, wenn

die Größen so definiert werden, daß sie ein definiertes Transformationsverhalten unter (lokalen) Lorentztransformationen besitzen.

Wir sind oben stillschweigend davon ausgegangen, daß wir die thermodynamischen Größen im **Ruhsystem** des betreffenden makroskopischen Systems definiert haben. Betrachten wir etwa ein Gas, ist dieses durch dasjenige Bezugssystem vorgegeben, in dem der Behälter, in dem es enthalten ist, ruht. Freilich gilt diese Betrachtung auch für ein willkürlich herausgegriffenes Teilvolumen des Gases wie bei der obigen Betrachtung des großkanonischen Ensembles oder in der Fluidodynamik (also der Hydro- und Aerodynamik), wo **lokales thermodynamisches Gleichgewicht** herrscht. Demzufolge ist unsere Temperaturdefinition so zu verstehen, daß dies die Temperatur für einen Beobachter darstellt, der sich relativ zum dem betrachteten Fluidvolumenelement in Ruhe befindet. Dies läßt sich konzeptionell auch sehr leicht im praktisch operationalen Sinne analysieren: Wollen wir die Temperatur eines Systems messen, müssen wir ein geeignetes Thermometer derart mit dem System in Kontakt bringen, daß es Energie mit ihm austauschen kann, wobei definitionsgemäß das Thermometer relativ zu dem vermessenen System ruht. Durch diese Temperaturdefinition wird ein ausgezeichnetes Bezugssystem definiert. Oft wird auch etwas ungenau von einer Brechung der Lorentzinvarianz im Kontext mit Vielteilchensystemen gesprochen. Freilich ist die Lorentzinvarianz der Naturgesetze nicht tatsächlich verletzt, sondern es ist eben lediglich durch das Ruhssystem des betrachteten makroskopischen Systems ein Bezugssystem objektiv physikalisch ausgezeichnet, und dieses wird zur Definition der intrinsischen Größen desselben benutzt. Die **Temperatur** ist folglich ein **Lorentz-Skalar**. Ebenso bezieht sich die moderne Definition der Masse und des Spins von Teilchen auf das Ruhssystem der Teilchen (vgl. unsere Betrachtungen zum masselosen Fall in Abschnitt 2.1).

Die Thermodynamik läßt sich demnach wie folgt auch manifest kovariant definieren. Dazu muß man lediglich die **Vierergeschwindigkeit des Fluidelements** u^μ einführen. Dies ist ein Vierervektor. In einem vorgegebenen Bezugssystem, wo es die Dreiergeschwindigkeit \vec{v} besitzt, ist

$$(u^\mu) = \sqrt{\frac{1}{1 - \vec{v}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow u_\mu u^\mu = 1. \quad (1.7.1)$$

Eine erhaltene Ladung ergibt sich stets aus einem **Viererstromdichtevektor**

$$J^\mu = \rho_0 u^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad (1.7.2)$$

wobei ρ_0 die **Ladungsdichte im Ruhssystem** des Fluidelements ist. Die Gesamtladung des Fluidelements ist dann als intrinsische Größe desselben durch

$$Q = \int_{V_0} d^3 \vec{x}^{(0)} \rho_0 dV_0 = \int_V d^3 \vec{x} \rho dV \quad (1.7.3)$$

gegeben. Dabei ergibt sich die letztere Identität daraus, daß wegen der Längenkontraktion $dV = \sqrt{1 - \vec{v}^2} dV_0$ und $\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - \vec{v}^2}$ gilt. Demnach ist also die Gesamtladung Q eine skalare Größe. Damit ist die manifest kovariante Schreibweise für den großkanonischen Statistische Operator durch

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp[-\beta(u_\mu \mathbf{P}^\mu - \mu \mathbf{Q})], \quad Z(u; \beta, \mu) = \text{Tr} \exp[-\beta(u_\mu \mathbf{P}^\mu - \mu \mathbf{Q})]. \quad (1.7.4)$$

Dabei bilden β und u_μ insgesamt *drei* Lagrangeparameter zur Berücksichtigung des mittleren Gesamtviererimpulses des Systems. Es ist klar, daß im Ruhssystem $u^0 = 1$, $\vec{u} = 0$ ist und folglich $u_\mu \mathbf{P}^\mu = \mathbf{H}^{(0)}$

⁵Man beachte, daß \vec{v} *nicht* die Raumkomponenten eines Vierervektors sind!

der Hamiltonoperator im Ruhssystem ist. Es ist daraus auch klar, daß das **chemische Potential** ein Skalar ist. Der Statistische Operator und damit auch die Zustandssumme ist ein Skalarfeld bzgl. des Arguments u . Damit ist auch die Entropie in diesem Sinne ein Skalar.

Bleibt noch die Natur des Drucks zu klären. Betrachten wir dazu z.B. ein ideales Fluid. Energie- und Impulsdichte sind im relativistischen Kontext zum **Energie-Impuls-Spannungstensor** zusammenzufassen. Im Ruhssystem des Fluids ist

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \text{diag}(\varepsilon, p, p, p). \quad (1.7.5)$$

Dabei ist zu beachten, daß in der Energiedichte $\varepsilon^{(0)}$ die Ruhemasse sowie die inneren Anregungen der Konstituenten (z.B. Vibrationen und Rotationen von Molekülen oder Anregungen höherer Atomzustände als dem Grundzustand etc.) eingehen. In einem beliebigen Bezugssystem können wir mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit des Fluidelements offenbar

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (1.7.6)$$

schreiben, und dies ist ein kovarianter Ausdruck, wobei zu beachten ist, daß sich Druck und Energiedichte auf das Ruhssystem des betrachteten Fluidelements beziehen. Diese Betrachtungen lassen sich entsprechend auf nichtideale Fluide verallgemeinern. Wir gehen darauf hier nicht näher ein, da wir im Verlauf dieses Skripts noch aus Sicht der statistischen Vielteilchentheorie im Detail darauf zurückkommen werden.

Kapitel 2

Thermische Quantenfeldtheorie freier Teilchen

2.1 Poincaréinvarianz

Wir setzen in dieser Vorlesung die grundlegende Konstruktion der Feldgleichungen aus der **Poincaréinvarianz**. Wir geben in diesem Abschnitt nur eine kurze Zusammenfassung. Genauer zur Darstellungstheorie der Poincarégruppe findet sich in [Wig39, Wei95, SU01, Hee02].

Bei der Konstruktion der Darstellungen der Poincarégruppe stellt sich heraus, daß der Zustand eines freien Teilchens durch Impuls und Spin festgelegt ist, wobei der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls durch die **on-shell-Bedingung**

$$k^2 := k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2, \quad (2.1.1)$$

gegeben ist. Dabei ist m die **invariante Masse** des Teilchens, wobei $m^2 \geq 0$ sein kann.

Für massive Teilchen, also $m^2 > 0$, kann stets ein **Ruhsystem** des Teilchens definiert werden, denn man kann zu jedem zeitartigen Vierervektor \vec{k} stets eine Lorentztransformation derart finden, daß in dem betreffenden Bezugssystem $\vec{k} = 0$ ist. Das Transformationsverhalten der Einsteilchenzustände zu $\vec{k} = 0$, also für ruhende Teilchen, unter **Drehungen** ist dann durch den **Spin** $s \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$ bestimmt, und in diesem Bezugssystem kann dann die z -Komponente des Spins die Werte $\sigma = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$ annehmen. Im Gegensatz zum analogen nichtrelativistischen Fall der Poincarégruppe ergibt im allgemeinen die Aufspaltung des Gesamtdrehimpulses in einen Bahndrehimpuls- und einen Spinanteil keinen Sinn.

Weiter können Teilchen auch masselos sein, d.h. dann gilt $m = 0$. In diesem Fall kann man kein Ruhsystem für die Teilchen definieren. Vielmehr bewegen sie sich in jedem Inertialsystem mit der Lichtgeschwindigkeit. Auch diese Teilchen besitzen einen Spinfreiheitsgrad, der durch das Verhalten von Drehungen um die Dreierimpulsrichtung des Teilchens charakterisiert ist. Mögliche Werte für den Spin masseloser Teilchen sind wieder $s = 0, 1/2, 1, \dots$. Der Zustand eines masselosen Teilchens mit Spin s ist dann außer durch seinen Dreierimpuls \vec{k} durch die Komponente des Spins in Richtung von \vec{k} charakterisiert, die **Helizität**. Es ergeben sich daher nur *zwei* mögliche Helizitätsfreiheitsgrade, nämlich $\lambda = \pm s$.

Der Fall $m^2 < 0$ ist mathematisch gesehen auch möglich. Es stellt sich aber heraus, daß die dadurch beschriebenen hypothetischen **Tachyonenfelder** nicht zu mit der Forderung nach **Kausalität** verträglichen Modellen wechselwirkender Teilchen führen. Bislang gibt es auch keinerlei experimentelle Hinweise auf die Existenz solcher Zustände.

Weitere Forderungen an die Feldtheorie sind die der **Lokalität und Mikrokausalität**, da diese Forderungen hinreichend für eine Poincaré-kovariante, kausale S -Matrix sind, die das **linked-Cluster-Prinzip** erfüllt [Wei95]. Außerdem wird noch verlangt, daß der **Hamiltonoperator** nach unten beschränkt ist, d.h. daß ein stabiler **Grundzustand** für Systeme aus relativistischen Teilchen existiert. Das linked-Cluster-Prinzip besagt, daß Vorgänge für räumlich weit voneinander entfernte Prozesse voneinander stochastisch unabhängig sind¹. Die Forderung der Lokalität verlangt, daß sich die Feldoperatoren unter Poincarétransformationen wie die entsprechenden klassischen Felder transformieren, z.B. für Vektorfelder

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} - a^{\mu}, \quad A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x). \quad (2.1.2)$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Vierervektor, der Raum-Zeit-Translationen parametrisiert und $\Lambda^{\mu}_{\nu} \in \text{SO}(1,3)^{\uparrow}$ eine **eigentlich orthochronen Lorentztransformation**.

Die Beschränktheit der Energie nach unten bedeutet, daß für jeden Zustand ψ des Hilbertraums der Hamiltonoperator

$$\langle \psi | \mathbf{H} | \psi \rangle \geq 0 \quad (2.1.3)$$

erfüllt. Dabei haben wir durch geeignete Wahl des Energienullpunkts die Energie des Grundzustandes zu 0 gewählt.

Die Forderung der **Mikrokausalität** verlangt, daß raumartig zueinander gelegene Meßereignisse, einander nicht beeinflussen können. Das bedeutet, daß lokale Observablen O_1 und O_2 bei raumartigen Abständen miteinander verträglich sind, d.h. daß für die entsprechenden Operatoren

$$[O_1(x), O_2(y)] = 0 \quad \text{falls} \quad (x - y)^2 < 0 \quad (2.1.4)$$

ist.

Wie wir unten anhand der in dieser Vorlesung benötigten Beispiele für $s = 0, 1/2, 1$ sehen werden, ergibt sich aus diesen Forderungen zwingend, daß es zu jedem Teilchen auch ein **Antiteilchen** derselben Masse aber entgegengesetzten Ladungsquantenzahlen existieren muß. Durch spezielle Einschränkung an die Feldoperatoren kann man aber auch erreichen, daß die Antiteilchen identisch mit den Teilchen sind. In diesem Fall existieren keine Ladungsquantenzahlen, so daß man auch von **strikt neutralen Teilchen spricht**.

Außerdem folgt, daß Teilchen mit halbzahligem Spin stets mit **Antikommutatorrelationen** quantisiert werden müssen, also zwingend **Fermionen** sein müssen. Entsprechend sind Teilchen mit ganzzahligem Spin stets **Bosonen** (Spin-Statistik-Theorem [PB40]).

Weiter ist die S -Matrix außer unter eigentlich orthochronen Poincaré-Transformationen automatisch auch unter der Transformation **PCT** invariant, d.h. jeder im Rahmen der Theorie mögliche Streuprozess impliziert, daß auch der entsprechende Streuprozess für die zugleich räumlich gespiegelten, zeitumgekehrten Prozesse der entsprechenden Antiteilchen möglich sein muß und daß sich dieselben Wirkungsquerschnitte für diese beiden Prozesse ergeben müssen. Experimentell wissen wir, daß die schwache Wechselwirkung sowohl die Raumspiegelungssymmetrie als auch die kombinierte CP-Symmetrie verletzt. Ein direkter Nachweis, daß auch die Symmetrie unter Zeitumkehrung verletzt ist, ist bislang nicht gelungen. Allerdings impliziert dies die Forderung einer Beschreibung durch eine lokale, mikrokausale Quantenfeldtheorie mit stabilem Grundzustand. Deshalb wäre ein direkter Nachweis der Verletzung der Zeitumkehrsymmetrie durch die Schwache Wechselwirkung zugleich der Nachweis, daß die bewährten feldtheoretischen Konzepte der Lokalität, Kausalität und Stabilität nicht strikt erfüllt sind.

¹Dies schließt allerdings langreichweitige Korrelationen zwischen Meßreihen an verschiedenen evtl. weit von einander entfernten Orten aufgrund der quantenmechanischen **Verschränkung** nicht aus.

2.2 Lagrange- und Hamiltonformalismus für Felder

Das **Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung** hat sich für die gesamte moderne Physik als äußerst nützlich erwiesen, denn es gestattet eine elegante Formulierung der Symmetrieprinzipien, die der gesamten fundamentalen Physik zugrundeliegen. Allein die Symmetrieprinzipien sind es nämlich, die eine konsistente Formulierung der Quantentheorie erlauben. Für diese Vorlesung werden wir von diesen gruppentheoretischen Methoden² nur sporadisch Gebrauch machen und die eher heuristische Methode der **kanonischen Quantisierung** verwenden, aber selbst diese kommt nicht ohne das Wirkungsprinzip in der Hamiltonschen Formulierung aus. Wir erinnern daher zunächst an die Grundlagen dieser Formulierung für die **Punktmechanik**.

Ein System von Massenpunkten wird zunächst im Konfigurationsraum mit generalisierten Koordinaten q_k ($k \in \{1, 2, \dots, f\}$) beschrieben. Die **Dynamik des Systems** wird auf der fundamentalen Ebene der Physik durch eine **Lagrangefunktion**

$$L = L(q, \dot{q}) \quad (2.2.1)$$

beschrieben.

Sind z.B. die q_k kartesische Koordinaten für ein nichtrelativistisches System von Massenpunkten, die untereinander durch Paarwechselwirkungen, die ein Potential besitzen, interagieren, lautet die Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^f \frac{m}{2} \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k_1 \neq k_2} V(q_{k_1} - q_{k_2}). \quad (2.2.2)$$

Das **Wirkungsfunktional** ist nun eine Abbildung, die hinreichend oft stetig differenzierbare Kurven $q(t)$ vermöge

$$S[q] = \int dt L(q, \dot{q}, t) \quad (2.2.3)$$

in die reellen Zahlen abbildet.

Die Bewegungsgleichung ergibt sich dann aus dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung, demzufolge das Punktteilchensystem derjenigen Trajektorie folgt, die die Wirkung minimiert (genauer gesagt, genügt es schon, daß S stationär wird):

$$\delta S[q] = \int dt \left(\sum_{k=1}^f \delta q_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \delta \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.2.4)$$

Da wir hierbei definitionsgemäß die Zeit nicht mitvariieren, gilt $\delta \dot{q} = d\delta q/dt$, so daß wir durch partielle Integration im zweiten Term (2.2.4) in die Form

$$\delta S[q] = \int dt \sum_{k=1}^f \delta q_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.2.5)$$

bringen können. Da nun die δq_k beliebig gewählt werden können, muß die Klammer für jedes einzelne k verschwinden. Dies liefert die **Euler-Lagrange-Gleichungen** des Variationsproblems

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (2.2.6)$$

²Pauli sprach noch von der „Gruppenpest“, obwohl einige seiner wichtigsten Arbeiten von der Gruppentheorie Gebrauch machen; angefangen von der ersten Lösung des Wasserstoffproblems im Rahmen der modernen Quantentheorie bis hin zum Beweis der oben erwähnten Statistik- und CPT-Theoreme.

und diese stimmen für die Lagrangefunktion (2.2.2) in der Tat mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen überein.

Der Lagrangeformalismus für **Felder** läßt sich aus dieser Betrachtung leicht verallgemeinern. Betrachten wir als Beispiel ein skalares Feld $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$. Im Lagrangeformalismus fassen wir \vec{x} als Parameter, der die Freiheitsgrade parametrisiert, auf (also in Analogie zum Index k bei Punktteilchen).

Um relativistisch kovariante Feldgleichungen zu erhalten, liegt es nahe, ein **skalares Wirkungsfunktional** zu konstruieren. Die dazugehörige Lagrangefunktion wird aufgrund der kontinuierlichen Natur von \vec{x} zu einem Funktional

$$L[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.2.7)$$

Dies ist sicher nicht einfach kovariant zu formulieren, denn das Dreivolumenelement $d^3\vec{x}$ ist keine relativistische Invariante. Allerdings wird das Wirkungsfunktional

$$A[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dt L[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.2.8)$$

ein Skalar, wenn $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ ein (als Funktion von $x = (t, \vec{x})$ gelesen) ein vierer-skalares Feld ist. Freilich ist dann auch die Variation von A ein skalares Feld und damit auch die aus dem Hamiltonschen Prinzip entstehenden Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (2.2.9)$$

eine Lorentz-kovariante Beziehung.

Als Beispiel betrachten wir ein freies reelles **Klein-Gordon-Feld**. Seine Lagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (2.2.10)$$

gegeben. In der Tat liefert (2.2.9) die **Klein-Gordon-Gleichung**

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.2.11)$$

Dabei ist $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta$ der **d'Alembert-Operator**. Betrachten wir nun zunächst weiter das Punktteilchensystem. Wir gelangen zur Hamiltonschen Formulierung, indem wir zunächst die zu den q_k **kanonisch konjugierten Impulse**

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = m\dot{q}_k \quad (2.2.12)$$

berechnen. Die **Hamiltonfunktion** ist durch

$$H(q, p) = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^f \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k_1 \neq k_2} V(q_{k_1} - q_{k_2}) \quad (2.2.13)$$

gegeben. Dabei ist es wichtig, daß wir die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_k umkehrbar eindeutig durch die generalisierten Impulse \dot{p}_k ausdrücken können. Entsprechend folgt für den Fall des Klein-Gordon-Feldes der kanonisch konjugierte Feldimpuls

$$\Pi(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x) \quad (2.2.14)$$

und die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H(\phi, \Pi) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \mathcal{H}(\phi, \Pi) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} [\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \left[\Pi^2(x) + (\vec{\nabla} \phi(x))^2 + m^2 \phi^2(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Wie schon an diesem einfachen Beispiel klar wird, besteht der Nachteil der Hamiltonschen Formulierung gegenüber der durch die Lagrangedichte darin, daß die manifeste Kovarianz aufgrund der Auszeichnung der Zeitkoordinate gegenüber den Ortskoordinaten verloren geht. Allerdings besteht diese Asymmetrie zwischen Raum und Zeit in der Quantentheorie ohnehin. Geht man allerdings von einer skalaren Lagrangedichte aus, kann man sicher sein, daß die sich ergebenden Feldgleichungen kovariante Gleichungen sind, und diese Eigenschaft bleibt dann auch in der Hamiltonschen Formulierung bestehen.

Die Wirkung wird damit zu einem Funktional der Felder und ihrer kanonischen Impulse

$$S[\phi, \Pi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x [\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{H}(\phi, \Pi)]. \quad (2.2.16)$$

Für das punktmekanische System gewinnt man nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des **erweiterten Hamiltonschen Prinzips**, welches besagt, daß die Wirkung unter *unabhängiger* Variation der generalisierten Koordinaten und ihrer konjugierten Impulse stationär sein muß. Die entsprechende Variation ergibt dann die **Hamiltonschen kanonischen Gleichungen**:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (2.2.17)$$

Sei nun $f(q, p; t)$ eine beliebige auf dem Phasenraum definierte Funktion. Dann ergibt sich für deren totale Zeitableitung für die durch die Bewegungsgleichungen (2.2.17) bestimmten Trajektorien

$$\frac{d}{dt} f(q, p) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} =: \{f, H\}_{\text{pb}} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.2.18)$$

Der Schlüssel für die **kanonische Quantisierung** als heuristisches Hilfsmittel, zu einem klassischen System das quantenmechanische Pendant zu finden, bietet die oben eingeführte **Poissonklammer** mit ihrer natürlichen **Lie-Algebrenstruktur**. Dazu deutet man die Koordinaten und kanonischen Impulse zu **selbstadjungierten Operatoren** auf einem geeigneten Hilbertraum um und definiert die Dynamik über das **Korrespondenzprinzip** mit **Kommutatoren**

$$\{A, B\}_{\text{pb}} \rightarrow \frac{1}{i} [\mathbf{A}, \mathbf{B}]. \quad (2.2.19)$$

Es ist klar, daß dies nur eine grobe Korrespondenz und keinesfalls mathematisch wohldefiniert ist! Insbesondere können bei operatorwertigen Funktionen von nichtkommutativen Operatoren **Operatorordnungsprobleme** auftreten. Jedenfalls liefert die kanonische Quantisierung des oben verwendeten Beispiels eines Punktteilchensystems, ausgedrückt durch kartesische Koordinaten zur nichtrelativistischen Quantentheorie im Sinne der **ersten Quantisierung** mit dem Heisenbergbild der Zeitentwicklung von Operatoren und Zuständen³.

³Es ist eine lehrreiche Übung, die kanonische Quantisierung für ein Punktteilchen in einem äußeren Zentralpotential in Kugelkoordinaten zu versuchen. Dabei stellt man fest, daß die kanonische Quantisierung uneindeutig ist, und man leicht zu einer „falschen Schrödingergleichung“ gelangt. Eine Lösung solcher Probleme ist die Verwendung gruppentheoretischer Methode (s. z.B. [Kle03]).

Die feldtheoretische Verallgemeinerung ist wieder durch die Ersetzung von gewöhnlichen Ableitungen durch Funktionalableitungen gegeben. Wir haben also die **kanonischen Feldgleichungen**

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\delta H}{\delta \Pi(x)}, \quad \dot{\Pi}(x) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(x)} \quad (2.2.20)$$

mit dem Hamiltonfunktional (2.2.15). Für das Klein-Gordon-Feld ergibt dies die Feldgleichungen

$$\dot{\phi}(x) = \Pi, \quad \dot{\Pi}(x) = -m^2 \phi + \Delta \phi. \quad (2.2.21)$$

leitet man die erste Gleichung nochmals nach der Zeit ab und setzt die zweite Gleichung ein, gelangt man wieder zur Klein-Gordon-Gleichung (2.2.11).

Die entsprechende Verallgemeinerung für die Poissonklammer zweier Funktionale der Felder und kanonisch konjugierten Feldimpulse lautet

$$\{A, B\}_{\text{pb}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{\delta A}{\delta \phi(x)} \frac{\delta B}{\delta \Pi(x)} - \frac{\delta A}{\delta \Pi(x)} \frac{\delta B}{\delta \phi(x)} \right]. \quad (2.2.22)$$

Insbesondere ergibt sich für die Poissonklammern für Felder und kanonische Feldimpulse

$$\{\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} = 0, \quad \{\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})\}_{\text{pb}} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.2.23)$$

Es ist dabei zu beachten, daß in den Poissonklammern stets Ausdrücke zu **gleichen Zeiten** zu stehen kommen müssen, denn die Funktionalableitungen beziehen sich auf Integrationen bzgl. der räumlichen Koordinaten allein. Auch hier wird wieder der Verlust der manifesten Kovarianz deutlich: Die Hamiltonsche Formulierung bezieht sich stets auf die Wahl eines bestimmten inertialen Bezugssystems (oder „Beobachtera“). Daß diese Wahl letztlich nicht zur Verletzung der Lorentzinvarianz führt, wird durch die Lorentz-Invarianz der zugrundeliegenden Lagrangedichte bzw. Wirkung garantiert.

Das Analogon von Gl. (2.2.18) für das Feldsystem ist mit der Definition (2.2.22) durch

$$\frac{d}{dt} A[\phi, \Pi; t] = \{A, H\}_{\text{pb}} + \frac{\partial}{\partial t} A \quad (2.2.24)$$

gegeben. Setzt man für A insbesondere die Felder und kanonischen Feldimpulse ein, erhält man wieder die kanonischen Feldgleichungen (2.2.20), und man kann das Korrespondenzprinzip zur kanonischen Quantisierung (2.2.19) verwenden, was dann zu Feldoperatoren im Heisenbergbild führt.

2.3 Quantisierung des freien Klein-Gordon Feldes

Wir betrachten in diesem Abschnitt die kanonische Quantisierung des reellen Klein-Gordon-Feldes. Seien also ϕ und Π nunmehr Feldoperatoren, die wir entsprechend der Realität des klassischen Feldes als selbstadjungiert annehmen. Die **Observablenalgebra** ist dann vermöge des Korrespondenzprinzips (2.2.19) durch die **kanonischen Kommutatorrelationen**

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0, \quad [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0, \quad [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.3.1)$$

gegeben. *Scheinbar* ohne Operatorordnungsprobleme können wir dann die Hamiltondichte aus der klassischen Theorie aus (2.2.15) ablesen:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\Pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \Rightarrow \mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \mathcal{H}. \quad (2.3.2)$$

Wie wir sehen werden, ist dieser Ausdruck nicht so harmlos, wie er auf den ersten Blick aussieht, denn die kanonischen Vertauschungsregeln weisen schon darauf hin, daß die Feldoperatoren **operatorwertige Distributionen** repräsentieren, deren Produkte an gleichen Raum-Zeitpunkten problematisch sind.

Es ist allerdings mit Hilfe der Kommutatorrelationen (2.3.1) leicht zu zeigen (Übung!), daß die Feldoperatoren dieselben kanonischen Feldgleichungen (2.2.21) erfüllen wie die entsprechenden klassischen Felder:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{i} [\phi, \mathbf{H}] = \Pi, \quad \dot{\Pi} = \frac{1}{i} [\Pi, \mathbf{H}] = -m^2 \phi + \Delta \phi. \quad (2.3.3)$$

Dazu benötigt man nur die allgemeine Relation

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A} [\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \mathbf{B} \quad (2.3.4)$$

und die Kommutatorrelationen (2.3.1).

Für konkrete Rechnungen benötigen wir die Lösung der Feldoperatorgleichungen (2.3.3), die zugleich die Kommutatorregeln (2.3.1) erfüllen. Nun liefert Ableiten der ersten Gleichung in (2.3.3) und Einsetzen der zweiten Gleichung die Klein-Gordongleichung

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.3.5)$$

Da wir im folgenden die Thermodynamik relativistischer idealer Gase im Rahmen des großkanonischen Ensembles studieren wollen, betrachten wir Lösungen in einem endlichen Würfel der Kantenlänge L mit periodischen Randbedingungen. Dahinter verbirgt sich die Idee, daß wir aus einem großen Gasvolumen einen Würfel (der immer noch im Mittel sehr viele Teilchen enthalten soll, also „makroskopische Ausmaß“ besitzt) ausgesondert denken. Da dieser repräsentativ für den Gleichgewichtszustand im Gesamtvolumen sein soll, ist es natürlich, die periodischen Randbedingungen

$$\phi(t, \vec{x} + L\vec{e}_i) = \phi(t, \vec{x}) \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (2.3.6)$$

zu fordern. Die Klein-Gordongleichung (2.3.5) besitzt offenbar **ebene Wellen** als Lösung, und zwar

$$u_{\vec{k}, \pm}^{\vec{x}}(x) = \exp(-ik \cdot x) \Big|_{k^0 = \pm E(\vec{k})} \quad \text{mit } E(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (2.3.7)$$

Diese bezeichnen wir als die **Feldmoden**. Die periodischen Randbedingungen (2.3.6) ergeben weiter, daß die Dreierimpulse \vec{k} die diskreten Werte

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n} \quad \text{mit } \vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \quad (2.3.8)$$

annehmen müssen. Demnach lassen sich die Felder in der folgenden Weise nach Fourier-Reihen entwickeln⁴:

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \left[\frac{c_+(\vec{k})}{2E(\vec{k})L^3} u_{\vec{k},+}^{\vec{x}}(x) + \frac{c_-(\vec{k})}{2E(\vec{k})L^3} u_{\vec{k},-}^{\vec{x}}(x) \right]. \quad (2.3.9)$$

⁴Die Wahl der Normierung erweist sich im Limes $L \rightarrow \infty$ als nützlich. Dann werden die Summen über die diskreten Impulse effektiv zu Integralen, denn die Zahl von Impulszuständen in einem Impulsvolumen $d^3 \vec{p}$ ist offenbar $d\rho(\vec{k}) = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}$, und $d^3 \vec{p} / (2E(\vec{k})) = d^4 k \Theta(k^0) \delta(k^2 - m^2)$ ist offenbar eine Invariante unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen (Übung).

Weiter haben wir oben verlangt, daß die Feldoperatoren selbstadjungiert sein sollen. Das liefert im Zusammenhang mit der Definition (2.3.7) der Moden die Bedingung

$$\mathbf{c}_-(\vec{k}) = \mathbf{c}_+^\dagger(-\vec{k}). \quad (2.3.10)$$

Setzen wir nun $\mathbf{a}(\vec{k}) = \mathbf{c}_+(\vec{k})$ und benennen im zweite Term der Summe den Summationsindex in $-\vec{k}$ um, folgt wegen

$$u_{-\vec{k},-}(x) = u_{+\vec{k},+}^*(x) \quad (2.3.11)$$

die folgende Form für den Feldoperator

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2E(\vec{k})L^3} \left[\mathbf{a}(\vec{k}) u_{\vec{k},+}(x) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) u_{\vec{k},+}^*(x) \right]. \quad (2.3.12)$$

Wie wir gleich noch sehen werden, ist die Tatsache, daß hier nur die Feldmoden $u_{\vec{k},+}$ auftreten, entscheidend für die Interpretation der Moden mit negativer Frequenz $u_{\vec{k},-}$. Wie wir sehen werden, erweist sich dadurch nämlich $\mathbf{a}(\vec{k})$ als Vernichtungs- und $\mathbf{a}^\dagger(\vec{k})$ als Erzeugungsoperator für ein Teilchen mit **positiver Energie** $E(\vec{k}) = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Diese als **Feynman-Stückelberg-Trick** bekannte Umdeutung ist deshalb so wichtig, weil sie dafür sorgt, daß die **Energie nach unten beschränkt** ist, also ein stabiler Grundzustand existiert und keine Teilchen mit negativer Energie auftauchen. Da diese aufgrund unserer Wahl der Kommutatorvertauschungsrelation nämlich Bosonen sind, könnten wir dann beliebig viele Teilchen in einen Zustand negativer Energie bringen, und die Energie wäre nicht nach unten beschränkt, so daß diese Theorie instabil wäre, weil kein Zustand niedrigster Energie existierte. Es läßt sich nun leicht nachrechnen (Übung!), daß sich die Fouriertransformation (2.3.12) mittels

$$\mathbf{a}(\vec{k}) = i \int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \quad (2.3.13)$$

umkehren läßt. Dabei bedeutet das Zeitableitungssymbol

$$\mathbf{A} \overleftrightarrow{\partial}_t \mathbf{B} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \mathbf{B}. \quad (2.3.14)$$

Dabei ist bei Verwendung im Zusammenhang mit Operatoren auf die so definierte Reihenfolge der Operatorprodukte zu achten. Durch hermitesches Adjungieren von (2.3.14) erhält man auch die entsprechende Darstellung für den Vernichtungsoperator

$$\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) = -i \int_V d^3 x u_{\vec{k},+}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) = +i \int_V d^3 x \phi(x) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{k},+}(x). \quad (2.3.15)$$

Mit Hilfe von (2.3.13-2.3.15) sowie den Vertauschungsregeln (2.3.1) erhält man die Vertauschungsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (Übung!)

$$\left[\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}(\vec{k}') \right] = 0, \quad \left[\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = 2E(\vec{k})L^3 \delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \quad (2.3.16)$$

Dies zeigt nun, daß unser System von Feldoperatoren einem Satz von abzählbar unendlich vielen voneinander unabhängigen **harmonischen Oszillatoren** äquivalent ist (abgesehen von unserer etwas

abgeänderten Normierungskonvention). Aus der Quantentheorievorlesung ist die Konstruktion des Hilbertraums für die harmonischen Oszillatoren bekannt:

Als vollständigen Satz kompatibler Observabler wählt man die **“Phononzahlen”**, zu den einzelnen Moden

$$\mathbf{n}(\vec{k}) := \frac{1}{2E(\vec{k})L^3} \mathbf{a}^\dagger(\vec{k})\mathbf{a}(\vec{k}) \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}; \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3. \quad (2.3.17)$$

Hier interpretieren wir dies freilich als Besetzungszahlen von Zuständen durch Teilchen mit Impuls $\mathbf{n}(\vec{k})$. Es ist klar, daß diese Operatoren selbstadjungiert sind. Unter Verwendung der Kommutatorrelationen (2.3.16) kann man auch nachweisen, daß sie kommutieren (Übung!):

$$\left[\mathbf{n}(\vec{k}), \mathbf{n}(\vec{k}') \right] = 0, \quad (2.3.18)$$

so daß ein vollständiger Satz simultaner Eigenzustände dieser Operatoren existiert:

$$\mathbf{n}(\vec{k}) \left| \{n(\vec{k})\}_{\vec{k}} \right\rangle = n(\vec{k}) \left| \{n(\vec{k})\}_{\vec{k}} \right\rangle \quad \text{mit} \quad \forall \vec{k} : n(\vec{k}) \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.3.19)$$

Dabei zeichnet sich der **Vakuumzustand** $|\Omega\rangle$ durch

$$\forall \vec{k} : \mathbf{a}(\vec{k})|\Omega\rangle = 0 \quad (2.3.20)$$

aus. Die übrigen normierten Eigenzustände sind dann durch

$$\left| \{n(\vec{k})\}_{\vec{k}} \right\rangle = \prod_{\vec{k}} \sqrt{\frac{1}{N(\vec{k})^{n(\vec{k})} n(\vec{k})!}} \left[\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) \right]^{n(\vec{k})} |\Omega\rangle \quad \text{mit} \quad N(\vec{k}) = 2E(\vec{k})L^3 \quad (2.3.21)$$

gegeben. Diese Basiszustände spannen dann den **Vielteilchenraum** für eine unbestimmte Zahl von **Bosonen** auf, den **bosonischen Fockraum**.

Setzen wir nun die Modenentwicklung (2.3.12) in den Hamiltonoperator (2.3.2) ein, erhalten wir den folgenden Ausdruck (Übung!):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{N(\vec{k})} E(\vec{k}) \left[\mathbf{a}^\dagger(\vec{k})\mathbf{a}(\vec{k}) + \mathbf{a}(\vec{k})\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) \right]. \quad (2.3.22)$$

Wendet man im zweiten Term der Klammer die Kommutatorregeln (2.3.16) an, ergibt dies den **divergenten Ausdruck**

$$\mathbf{H} = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \left[\mathbf{n}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.3.23)$$

Der zweite Term in der eckigen Klammer war insofern zu erwarten als sich bei der üblichen Wahl des Energienullpunktes für jeden Oszillator die Nullpunktsenergie $E(\vec{k})/2$ als der Zustand niedrigster Energie ergibt. Für unser Gesamtsystem aus unendlich vielen voneinander unabhängigen Oszillatoren addiert sich dies zu einer divergenten Größe auf. Diese ist allerdings $\propto \mathbb{1}$, kommutiert also trivialerweise mit allen übrigen Operatoren. Wir benötigen nun aber den Hamiltonoperator zunächst einmal nur, um die Bewegungsgleichungen zu finden, also (2.3.3) auszuwerten. Demnach können wir den divergenten Anteil von (2.3.23) abziehen und den **renormierten Hamiltonoperator**

$$\mathbf{H}_{\text{ren}} = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (2.3.24)$$

definieren. Für diesen gilt wegen (2.3.19-2.3.20)

$$\mathbf{H}_{\text{ren}}|\Omega\rangle = 0, \quad \mathbf{H}_{\text{ren}} \left| \{n(\vec{k})\}_{\vec{k}} \right\rangle = \sum_{\vec{k}'} E(\vec{k}') n(\vec{k}') \left| \{n(\vec{k})\}_{\vec{k}} \right\rangle. \quad (2.3.25)$$

Damit ist die Fockbasis (2.3.21) zugleich die Energieeigenbasis.

Das hier zutagetretende Operatorordnungsproblem rührt von dem bereits oben erwähnten distributionsartigen Charakter des Feldoperators $\phi(x)$ her, was die Multiplikation von Feldgrößen mit demselben Raumzeitargument problematisch macht. Unsere Lösung für den Hamiltonoperator erfolgte mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a(\vec{k})$ und $a^\dagger(\vec{k})$. Um diese Operatorordnungsvorschrift auch für die Feldoperatoren notieren zu können, führt man das **Normalordnungssymbol** für Feldoperatorprodukte am gleichen Raumzeitpunkt ein. Ist $A(x)$ usw. irgendein aus dem Feldoperator und dessen Ableitungen gebildetes Polynom, so bedeutet das Einschließen in Doppelpunkte $:A(x):$, daß darunter der Ausdruck verstanden werden soll, bei dem nach der Umrechnung in den entsprechenden Ausdruck für diesen Operator als Funktion von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren diese stets so anzuordnen sind, daß alle Erzeugungsoperatoren links von allen Vernichtungsoperatoren zu stehen kommen. Die Reihenfolge der Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren ist dabei offenbar gleichgültig, da diese Operatoren gemäß (2.3.16) untereinander kommutieren. Wir schreiben im folgenden

$$\mathbf{H} := \mathbf{H}_{\text{ren}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} : \mathcal{H}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] :. \quad (2.3.26)$$

2.4 Ideales Bose-Gas

Da wir für das selbstadjungierte Klein-Gordon-Feld keine erhaltenen Ladungen finden können, ist hier nur die **kanonische Gleichgewichtsverteilung**⁵

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathbf{H}), \quad Z = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H}) \quad (2.4.1)$$

sinnvoll. Das bedeutet, daß sich für diesen Fall **strikt neutraler Teilchen** die mittlere Teilchenzahl bereits durch die vorgegebene Temperatur des Systems einstellt, denn es gibt keine Erhaltungsgröße, die eine Einstellung durch Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse durch Wechselwirkung mit den Behälterwänden verhindern könnte.

Zur Berechnung der Zustandssumme verwenden wir die Fockbasis (2.3.21):

$$Z = \prod_{\vec{k}} \sum_{n(\vec{k})=0}^{\infty} \exp[-\beta n(\vec{k}) E(\vec{k})] = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{1 - \exp[-\beta E(\vec{k})]}. \quad (2.4.2)$$

Dabei haben wir die Summation über $n(\vec{k})$ läßt als geometrische Reihe ausgewertet. Dies zeigt, daß $\beta > 0$, d.h. die Temperatur $T > 0$ sein muß, und daß für das **kanonische Potential**

$$\Phi(\beta, V) = \ln Z(\beta, V) = - \sum_{\vec{k}} \ln \{1 - \exp[-\beta E(\vec{k})]\} \quad (2.4.3)$$

⁵In dem hier betrachteten Fall nicht wechselwirkender Teilchen sind allerdings sogar alle Besetzungszahloperatoren $\mathbf{n}(\vec{k})$ Erhaltungsgrößen. Dies ist aber eine unphysikalische Feststellung, denn wir müssen ja davon ausgehen, daß die Teilchen zumindest mit den „Behälterwänden“ wechselwirken und damit Energie austauschen können, damit das Gas überhaupt ins Gleichgewicht gelangen kann. Es zeigt sich dann, daß im hier betrachteten Fall eines strikt neutralen Bosegases keine Wechselwirkung konstruierbar ist, so daß auch nur die Gesamtteilchenzahl $\mathbf{N} = \sum_{\vec{k}} \mathbf{n}(\vec{k})$ Erhaltungsgröße ist. Es existiert dann auch keine andere ladungsartige Erhaltungsgröße, wie oben behauptet.

Im Limes $L \rightarrow \infty$ können wir den oben erwähnten Übergang zu einem Integral vollziehen und erhalten wegen (1.6.21) die Zustandsgleichung

$$\Phi(\beta, V) = \beta V p = -\frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \ln \left\{ 1 - \exp[-\beta E(\vec{k})] \right\}. \quad (2.4.4)$$

Die mittlere Energie ergibt sich daraus gemäß (1.4.9)

$$U(\beta, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \Phi(\beta, V) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} E(\vec{k}) f_B[E(\vec{k})] \quad (2.4.5)$$

mit der **Bose-Einstein-Verteilung**

$$f_B(E) = \frac{1}{\exp(\beta E) - 1}. \quad (2.4.6)$$

Wir können die Integrale (2.4.4) und (2.4.5) noch etwas vereinfachen, indem wir Kugelkoordinaten für \vec{k} einführen. Die Winkelintegrationen liefern dann einfach einen Faktor 4π , und wir erhalten Integrale der Form

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} f[E(\vec{k})] = 4\pi \int_0^\infty dK K^2 f\left(\sqrt{K^2 + m^2}\right). \quad (2.4.7)$$

Substituieren wir darin noch $E = \sqrt{K^2 + m^2}$ ergibt sich wegen $dE E = dK K$

$$I = 4\pi \int_m^\infty dE E \sqrt{E^2 - m^2} f(E). \quad (2.4.8)$$

Dies auf Φ angewandt liefert

$$\Phi(\beta, V) = -\frac{V}{2\pi^2} \int_m^\infty dE E \sqrt{E^2 - m^2} \ln[1 - \exp(-\beta E)] = \frac{\beta V}{6\pi^2} \int_m^\infty dE (E^2 - m^2)^{3/2} f_B(E), \quad (2.4.9)$$

wobei wir im letzten Schritt eine partielle Integration ausgeführt haben.

Für die innere Energie folgt gemäß (2.4.5)

$$U(\beta, V) = \frac{V}{2\pi^2} \int_m^\infty dE E^2 \sqrt{E^2 - m^2} f_B(E). \quad (2.4.10)$$

Für ein Gas **masseloser** neutraler Bosonen lassen sich die Integrale geschlossen ausführen (vgl. Anhang B.1) folgt daraus

$$\Phi(\beta, V) = \frac{\pi^2 V}{90 \beta^3}, \quad p = \frac{\Phi}{\beta V} = \frac{\pi^2}{90 \beta^4} \quad (2.4.11)$$

$$U(\beta, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \Phi(\beta, V) = \frac{\pi^2 V}{30 \beta^4} = 3pV. \quad (2.4.12)$$

Dies ist auch die niedrigste Ordnung einer Entwicklung für $T \ll m$ für nichtverschwindende Massen. Die Systematische Entwicklung der thermodynamischen Funktionen nach Potenzen von βm ist eine nichttriviale Aufgabe (s. [Hee03]), die wir hier nicht näher verfolgen wollen.

Der gegenteilige Grenzfall $T \ll m$ entspricht hingegen einer nichtrelativistischen Bewegung der Teilchen, denn für diesen Fall erwarten wir mittlere kinetische Energien von der Größenordnung $T \ll m$. Um dies zu beweisen, gehen wir von (2.4.9) für das kanonische Potential aus. Da in diesem Fall $\beta m = m/T \gg 1$ gilt, können wir die Boseverteilung wie folgt entwickeln:

$$f_B(E) = \frac{\exp(-\beta E)}{1 - \exp(-\beta E)} = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\beta j E). \quad (2.4.13)$$

Dies in (2.4.9) eingesetzt liefert die Reihe

$$\Phi(\beta, V) = \frac{\beta V}{6\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_m^{\infty} dE (E^2 - m^2)^{3/2} \exp(-\beta j E). \quad (2.4.14)$$

Resubstituieren wir wieder $E = \sqrt{m^2 + K^2}$, finden wir das Integral

$$\Phi(\beta, V) = \frac{\beta V}{6\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dK \frac{K^4}{\sqrt{K^2 + m^2}} \exp\left(-\beta j \sqrt{K^2 + m^2}\right). \quad (2.4.15)$$

Im Limes $\beta m \gg 1$ trägt hier nur der Term für $j = 1$ wesentlich bei. Außerdem können wir die Wurzel im Exponenten gemäß

$$\sqrt{K^2 + m^2} \simeq_{K \rightarrow 0} m + \frac{K^2}{2m} \quad (2.4.16)$$

entwickeln, da ohne hin nur die unmittelbare Umgebung um $K = 0$ wesentlich zum Integral beiträgt. In derselben Näherung können wir die Wurzel außerhalb der Exponentialfunktion durch m nähern. Damit folgt

$$\Phi(\beta, V) = \frac{\beta V}{6\pi^2 m} \exp(-\beta m) \int_0^{\infty} dK K^4 \exp\left(-\beta \frac{K^2}{2m}\right) = V \exp(-\beta m) \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2}. \quad (2.4.17)$$

Daraus folgt für die innere Energie

$$U(\beta, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \Phi(\beta, V) = V \exp(-\beta m) \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} \left(m + \frac{3}{2\beta}\right). \quad (2.4.18)$$

In der Klammer steht in der Tat die mittlere Energie für ein Teilchen in nichtrelativistischer Näherung, wobei zu beachten ist, daß wir hier den Massenbeitrag noch mit zur Energie zählen. Der Vorfaktor ist Φ und gibt somit die mittlere Teilchenzahl an, die sich durch die Wechselwirkungen mit der Behälterwand bei gegebener Temperatur einstellt. Wegen (1.6.21) ist demnach also

$$\bar{N} = p\beta V, \quad (2.4.19)$$

und das ist in der Tat die wohlbekanntete Zustandsgleichung für ein ideales Gas nichtrelativistischer Teilchen.

2.5 Geladene Klein-Gordon-Teilchen

Wir können die obige Theorie nichtwechselwirkender neutraler skalärer Teilchen leicht auf den Fall **geladener Teilchen** verallgemeinern. Dazu gehen wir von einem komplexen Feld ϕ aus. Die Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi. \quad (2.5.1)$$

Wir können dies als Lagrangedichte für zwei reelle Felder lesen, indem wir ϕ in Real- und Imaginärteil $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ mit $\phi_{1,2} \in \mathbb{R}$ aufspalten. Genauso können wir aber auch direkt mit dem komplexen Feld arbeiten und ϕ und ϕ^* als voneinander unabhängige Feldfreiheitsgrade betrachten. Wir denken uns nun die kanonische Quantisierung ausgeführt. Wir geben nur die Resultate an. Die Ausführung der Details verläuft völlig analog zum oben behandelten Fall des neutralen Feldes. Es ergeben sich die kanonischen Impulse

$$\Pi^\dagger = \dot{\phi}, \quad \Pi = \dot{\phi}^\dagger \quad (2.5.2)$$

und daraus die kanonischen Kommutatorrelationen zu gleichen Zeiten

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\phi(t, \vec{x}), \phi^\dagger(t, \vec{y})] = 0, \quad (2.5.3)$$

$$[\dot{\phi}(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{y})] = [\dot{\phi}(t, \vec{x}), \dot{\phi}^\dagger(t, \vec{y})] = 0, \quad (2.5.4)$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\phi(t, \vec{x}), \dot{\phi}^\dagger(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.5.5)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern wieder die Klein-Gordongleichungen für beide Feldoperatoren

$$(\square + m^2)\phi = (\square + m^2)\phi^\dagger = 0, \quad (2.5.6)$$

und die Modenentwicklung nach ebenen Wellen ist daher ebenfalls analog zum Fall des neutralen Feldes. Es fällt nur die Nebenbedingung der Selbstadjungiertheit des Feldoperators weg. Um die Beschränktheit des Hamiltonoperators nach unten zu garantieren, erhalten die Moden mit negativer Frequenz wieder Erzeugungsoperatoren. Wir haben es also mit zwei Teilchensorten zu tun:

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2E(\vec{k})L^3} \left[\mathbf{a}(\vec{k}) u_{\vec{k},+}(x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}) u_{\vec{k},+}^*(x) \right]. \quad (2.5.7)$$

Dabei haben wir die periodischen Randbedingungen für einen Würfel der Kantenlänge L benutzt. Es gelten wieder die Umkehrformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\vec{k}) &= i \int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x), & \mathbf{b}(\vec{k}) &= i \int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi^\dagger(x), \\ \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) &= -i \int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi^\dagger(x), & \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}) &= -i \int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x), \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

aus denen sich zusammen mit den kanonischen Kommutatorregeln (2.5.3-2.5.5) die Kommutatoren der Erzeuger und Vernichter berechnen lassen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}(\vec{k}')] &= [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{b}(\vec{k}')] = [\mathbf{b}(\vec{k}), \mathbf{b}(\vec{k}')] = 0, \\ [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}')] &= 0, \quad [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}')] = [\mathbf{b}(\vec{k}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}')] = 2E(\vec{k})L^3 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Die vollständige Bosonen-Fockbasis ist dann durch die simultanen Besetzungszustände für „a-Teilchen“ und „b-Teilchen“ gegeben:

$$\left| \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\}_{\vec{k}} \right\rangle = \prod_{\vec{k}} \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^{n_a(\vec{k})}}{\sqrt{N(\vec{k})^{n_a(\vec{k})} n_a(\vec{k})!}} \frac{(\mathbf{b}^\dagger)^{n_b(\vec{k})}}{\sqrt{N(\vec{k})^{n_b(\vec{k})} n_b(\vec{k})!}} |\Omega\rangle. \quad (2.5.10)$$

Jedes $n_a(\vec{k})$ und $n_b(\vec{k})$ durchläuft dabei wieder \mathbb{N}_0 , und wir haben den schon oben definierten Normierungsfaktor $N(\vec{k}) = 2E(\vec{k})L^3$, verwendet. Der Grundzustand $|\Omega\rangle$ ist der Vakuumzustand mit

$$\mathbf{a}(\vec{k})|\Omega\rangle = \mathbf{b}(\vec{k})|\Omega\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{k}. \quad (2.5.11)$$

Die Lagrangedichte (2.5.1) weist nun neben der per constructionem implementierten Poincarésymmetrie auch eine **globale Eichsymmetrie** auf, denn offenbar ändert sich die Lagrangedichte nicht, wenn man die Phase der Felder undefiniert:

$$\phi'(x) = \exp(i\alpha)\phi(x), \quad \phi'^{\dagger}(x) = \exp(-i\alpha)\phi^{\dagger}(x). \quad (2.5.12)$$

Die Analyse mit Hilfe des Noether-Theorems ergibt den **Noetherstrom**

$$\mathbf{j}_\mu(x) = i : \phi^{\dagger}(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi(x) :. \quad (2.5.13)$$

Der Operator für die Gesamtladung ist

$$\mathbf{Q} = \int_V d^3\vec{x} \mathbf{j}_0(x) = i \int_V d^3\vec{x} : \phi^{\dagger}(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) : \quad (2.5.14)$$

Setzen wir darin für ϕ^{\dagger} die Modenentwicklung (2.5.7) ein, multiplizieren den entstehenden Ausdruck aus und verwenden (2.5.8), erhalten wir unter Berücksichtigung der Normalordnungsvorschrift

$$\mathbf{Q} = \sum_{\vec{k}} [\mathbf{n}_a(\vec{k}) - \mathbf{n}_b(\vec{k})]. \quad (2.5.15)$$

Dabei sind die Besetzungszahloperatoren wie beim neutralen Feld durch

$$\mathbf{n}_a(\vec{k}) = \frac{1}{2E(\vec{k})L^3} \mathbf{a}^\dagger(\vec{k})\mathbf{a}(\vec{k}), \quad \mathbf{n}_b(\vec{k}) = \frac{1}{2E(\vec{k})L^3} \mathbf{b}^\dagger(\vec{k})\mathbf{b}(\vec{k}) \quad (2.5.16)$$

definiert. Dies bedeutet, daß die a -Teilchen die Ladung $+1$ und die b -Teilchen die Ladung -1 tragen. Wir haben es also mit zwei sich nur durch eine erhaltene intrinsische Ladungsquantenzahl unterschiedene Teilchensorten zu tun. Dies charakterisiert die Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie: Die Teilchen und Antiteilchen besitzen die gleiche Masse und den gleichen Spin (in unserem Fall skalarer Felder ist der Spin 0), tragen jedoch einander entgegengesetzte Noetherladungen zur durch die Phaseninvarianz beschriebenen Symmetrie.

Ebenso berechnet man aus der quantisierten Hamiltondichte den Hamiltonoperator zu

$$\mathbf{H} = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) [\mathbf{n}_a(\vec{k}) + \mathbf{n}_b(\vec{k})]. \quad (2.5.17)$$

Für das ideale Bosegas ergibt nun auch die vollständige **großkanonische Beschreibung** einen Sinn. Der großkanonische Statistische Operator lautet

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta\mathbf{H} - \alpha\mathbf{Q}). \quad (2.5.18)$$

Die Berechnung der Zustandssumme erfolgt wörtlich wie für neutrale Teilchen. Wir müssen nur sowohl über die Teilchen- als auch die Antiteilchenbeiträge summieren und die entgegengesetzte Ladung berücksichtigen. Es ergibt sich daraus

$$\Phi = \ln Z = - \sum_{\vec{k}} \left\{ \ln[1 - \exp(-\beta E(\vec{k}) - \alpha)] + \ln[1 - \exp(-\beta E(\vec{k}) + \alpha)] \right\}. \quad (2.5.19)$$

Dabei ist der erste Term der Beitrag der Teilchen (Ladung +1) und der zweite der der Antiteilchen (Ladung -1). Für die folgende Diskussion ist es bequemer, $\alpha = -\mu\beta$ zu setzen. Dabei ist μ das chemische Potential für die Teilchen. Entsprechend besitzen die Antiteilchen das chemische Potential $-\mu$. Damit das obige großkanonische Potential reell ist, müssen die Argumente in den Exponentialfunktionen negativ sein, was nur der Fall ist solange $-m \leq \mu \leq m$ ist.

Beim Übergang zum thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ und von den Summen zu Integralen müssen wir nun sorgfältig vorgehen. Betrachten wir den Fall, daß die mittlere Ladung $Q > 0$ vorgegeben ist. Dann ist bei gegebener Temperatur das thermodynamische Potential $\mu > 0$ so zu wählen, daß sich diese mittlere Ladung aus

$$Q = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi = \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{\exp[\beta(E(\vec{k}) - \mu)] - 1} - \frac{1}{\exp[\beta(E(\vec{k}) + \mu)] - 1} \right\} \quad (2.5.20)$$

ergibt. Es ist nun offensichtlich für diese für endliches Volumen gültige diskrete Formulierung der Zustandssumme kein Problem, da sich mit $\mu \rightarrow m$ bei festem $\beta > 0$ jede noch so große positive mittlere Ladung einzustellen läßt, denn in diesem Limes divergiert dann der Beitrag von den Teilchen für $\vec{k} = 0$. Analoges gilt für negative mittlere Ladungen für $\mu \rightarrow -m$. Gehen wir nun aber naiv zum Integral über, erhalten wir

$$Q^*(\beta, \mu) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left\{ f_B[E(\vec{k}) - \mu, \beta] - f_B[E(\vec{k}) + \mu, \beta] \right\}. \quad (2.5.21)$$

Dann kann bei vorgegebenem $Q > 0$ für eine hinreichend kleine Temperatur T auch für $\mu \rightarrow m$ die vorgegebene Gesamtladung nicht mehr erreicht werden, denn der in der Summe für diesen Fall relevante Beitrag der Teilchen bei $\vec{k} = 0$ ist in dem Integral wegen $d^3k \propto k^2 dk$ nicht mehr berücksichtigt. Wir bezeichnen im folgenden mit $T_c = 1/\beta_c$ die **kritische Temperatur**, für die

$$Q = Q^*(\beta_c, \mu = m \operatorname{sign} Q) \quad (2.5.22)$$

wird. Für $T > T_c$ (also $\beta < \beta_c$) kann man mit $\mu \in (-m, m)$ die vorgegebene Ladung Q einstellen, und wir können $Q^* = Q$ setzen.

Für $T < T_c$ ist selbst für $\mu = m$ noch $Q^* < Q$ und wir müssen den Beitrag zu $\vec{k} = 0$ aus der Summe wieder hinzufügen:

$$Q_0 = \frac{1}{\exp[\beta(m - \mu)] - 1}. \quad (2.5.23)$$

Der Limes $L \rightarrow \infty$ ist dann so auszuführen, daß die Ladungsdichte Q_0/V konstant bleibt, wobei $\mu \rightarrow m$ strebt. Dies bedeutet, daß eine makroskopische Zahl von Teilchen den Einteilchengrundzustand bei $\vec{k} = 0$ besetzen. Dieses Phänomen bezeichnet man als **Bose-Einstein-Kondensat**. Das Bose-Einsteinkondensat ist ein Beispiel für ein makroskopisches Quantenphänomen, und wir haben es mit einem **Phasenübergang** zu tun: Für $T < T_c$ ist die Ladungsdichte Q_0/V des Kondensats von 0 verschieden, während sie für $T > T_c$ im thermodynamischen Limes $L \rightarrow \infty$ verschwindet. Für interessante eine alternative Behandlung des Bose-Einstein-Kondensats im Rahmen des Pfadintegralformalismus verweisen wir auf die Literatur [Kap81, KG06].

Für **masselose geladene Bosonen**⁶ gilt $T_c \rightarrow \infty$, d.h. falls das gesamte Gas geladen ist (d.h. wenn es einen Teilchen- oder Antiteilchenüberschuß gibt), muß sich stets ein Bose-Einsteinkondensat bilden.

Zusammenfassend sind die thermodynamischen Größen für ein ideales Bosegas aus geladenen Teilchen durch

$$\begin{aligned} \Phi(\beta, \alpha) &= -\frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left\{ \ln \left[1 - \exp[-\beta(E(\vec{k}) - \mu)] \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[1 - \exp[-\beta(E(\vec{k}) + \mu)] \right] \right\}, \\ U(\beta, \alpha) &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} E(\vec{k}) \left\{ f_B[E(\vec{k}) - \mu, \beta] + f_B[E(\vec{k}) + \mu, \beta] \right\}, \\ Q(\beta, \alpha) &= \begin{cases} Q_0 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left\{ f_B[E(\vec{k}) - \mu, \beta] - f_B[E(\vec{k}) + \mu, \beta] \right\} & \text{für } T < T_c, \\ \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left\{ f_B[E(\vec{k}) - \mu, \beta] - f_B[E(\vec{k}) + \mu, \beta] \right\} & \text{für } T \geq T_c. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

2.6 Das freie Dirac-Feld

Mit dem Ziel, eine in sich konsistente relativistische Wellenmechanik zu konstruieren, stellte Dirac nach dem Vorbild der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung eine relativistische Wellengleichung auf, die die Zeitableitung nur in erster Ordnung enthält. Aus Gründen der Lorentzsymmetrie mußten auch die Ortsableitungen in erster Ordnung in die Gleichung eingehen. Außerdem mußte aus der Gleichung auch die Massenschalenbedingung $-(\square + m^2)\psi(x) = 0$ folgen. Es zeigte sich, daß dieses Programm nur mit einem **vierkomponentigen Dirac-Spinorfeld** ψ mit der Hilfe von vier **Dirac-Matrizen** γ^μ möglich war:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m\mathbb{1}_4)\psi = 0. \quad (2.6.1)$$

Zur Abkürzung hat Feynman seine „Slash-Notation“ eingeführt: $\not{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu$. Multiplizieren wir nun die Dirac-Gleichung (2.6.1) mit $i\not{\partial} + m\mathbb{1}_4$, erhalten wir

$$(-\not{\partial}^2 - m^2\mathbb{1}_4)\psi = 0. \quad (2.6.2)$$

⁶Dies ist freilich nur eine hypothetische Bemerkung, denn bislang kennen wir keine masselosen geladenen Bosonen. Zwar sind die Gluonen als Eichbosonen der starken Wechselwirkung masselos und tragen Farbladung, aber sie kommen wegen des **Confinements** nicht als freie Teilchen vor. Sie können daher auch nicht als ideales Gas beobachtet werden. Die in Schwerionenstößen bei den höchsten bislang erreichbaren Energien produzierten Feuerbälle heißer dichter dichter stark wechselwirkender Materie bilden hingegen ein stark wechselwirkendes Quark-Gluon-Plasma, das sich eher wie ein ideales Fluid verhält als ein ideales Gas.

Damit dies der Massenschalenbedingung entspricht, verlangen wir

$$\not{D}^2 = \square \quad (2.6.3)$$

bzw. noch allgemeiner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4. \quad (2.6.4)$$

Es ist klar, daß aus (2.6.4) tatsächlich (2.6.3) folgt:

$$\not{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbb{1}_4 = \square \mathbb{1}_4. \quad (2.6.5)$$

In einer 2×2 -Blocknotation lautet eine für unsere Zwecke besonders bequeme Realisierung⁷ der Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.6)$$

mit den bekannten Paulimatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.7)$$

Die Antikommutatorrelationen (2.6.4) folgen sofort aus den Antikommutatorrelationen für die Paulimatrizen

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk} \mathbb{1}_2. \quad (2.6.8)$$

Wir notieren weiter noch die **Pseudohermitizität der Diracmatrizen**

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \Leftrightarrow \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (2.6.9)$$

Das Verhalten unter **Lorentztransformationen** können wir herleiten, indem wir fordern, daß die Dirac-Gleichung forminvariant unter Lorentztransformationen ist. Dabei soll sich das Feld linear transformieren:

$$x' = \Lambda x, \quad \psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x). \quad (2.6.10)$$

Um $S(\Lambda)$ zu finden, bemerken wir, daß

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu. \quad (2.6.11)$$

Setzen wir das in die Diracgleichung für das transformierte Feld ein, erhalten wir

$$(i\not{D}' - m)\psi'(x') = [i(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \gamma^\mu \partial_\nu - m] S(\Lambda) \psi(x). \quad (2.6.12)$$

Multiplizieren wir dies von links mit $S^{-1}(\Lambda)$ folgt die Diracgleichung für das transformierte Feld, wenn

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma^\nu \Rightarrow S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (2.6.13)$$

Wir berechnen zunächst $S(\Lambda)$ für eine infinitesimale Lorentztransformation

$$\Lambda = \mathbb{1} + \delta\omega, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu. \quad (2.6.14)$$

⁷Dies ist die chirale oder Weyl-Darstellung.

Aus der Eigenschaft der Lorentztransformation, daß es Minkowskiprodukte zwischen beliebigen Vierervektoren invariant läßt, folgt

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (2.6.15)$$

Setzen wir darin (2.6.14) ein, ergibt sich aus dieser Bedingung, daß

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \quad (2.6.16)$$

ist. Wir setzen nun

$$S(\Lambda) = \mathbb{1}_4 + \frac{1}{8}\delta\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \quad S^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1}_4 - \frac{1}{8}\delta\omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \quad (2.6.17)$$

wobei $\gamma^{\mu\nu} = -\gamma^{\nu\mu}$ eine geeignete 4×4 -Matrix bezeichnen soll, die im Diracspinorraum wirkt. Bei der Matrixinversion haben wir nur die erste Ordnung in $\delta\omega$ berücksichtigt. Um nun $\gamma^{\mu\nu}$ zu bestimmen, wenden wir diesen Ansatz auf (2.6.13) an, wobei wir wieder bis zur ersten Ordnung in $\delta\omega$ entwickeln. Nach kurzer Rechnung (Übung) folgt

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^{\rho\sigma}] &= (g^{\mu\sigma}\gamma^\rho - g^{\mu\rho}\gamma^\sigma) = 2(\gamma^\rho\{\gamma^\mu, \gamma^\sigma\} - \{\gamma^\mu, \gamma^\rho\}\gamma^\sigma) \\ &= 2[\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma] = [\gamma^\mu, [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Wir können also

$$\gamma^{\rho\sigma} = [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (2.6.19)$$

setzen. Für endliche Lorentztransformationen folgt durch Anwenden der Matrix-Exponentialfunktion

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}\right). \quad (2.6.20)$$

Aus der Pseudohermitizität (2.6.9) und $(\gamma^0)^2 = 1$ folgt

$$\gamma^0(\gamma^{\rho\sigma})^\dagger\gamma^0 = \gamma^{\sigma\rho} = -\gamma^{\rho\sigma} \quad (2.6.21)$$

und damit

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0, \quad (2.6.22)$$

d.h. $S(\Lambda)$ ist pseudounitär. Es ist wichtig zu bemerken, daß $S(\Lambda)$ nicht wirklich unitär ist. Dies weist schon darauf hin, daß eine Einteilchenquantentheorie auf der Basis der Diracgleichung widersprüchlich in sich selbst ist, denn in einer solchen Quantentheorie sollten *alle* eigentlich orthochronen Lorentztransformationen unitär dargestellt werden. Dies ist aber nicht der Fall, wie wir nun zeigen wollen.

Betrachten wir zunächst einen **Boost** in der Richtung \vec{n} ($\vec{n}^2 = 1$). Die entsprechende Matrix besitzt die Form

$$\Lambda(\vec{\eta}) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \vec{n}^t \sinh \eta \\ \vec{n} \sinh \eta & \cosh \eta P_{\parallel}(\vec{n}) + P_{\perp}(\vec{n}) \end{pmatrix} \quad (2.6.23)$$

mit den Projektionsoperatoren (reelle 3×3 -Matrizen)

$$P_{\parallel}(\vec{n}) = \vec{n} \otimes \vec{n}, \quad P_{\perp} = \mathbb{1}_3 - \vec{n} \otimes \vec{n}. \quad (2.6.24)$$

Die Boostgeschwindigkeit ist $v = \sinh \eta / \cosh \eta = \tanh \eta$. Entwickeln wir für ein infinitesimales $\delta \eta$ (2.6.23) bis zur ersten Ordnung, finden wir die Exponentialdarstellung

$$\Lambda_B(\vec{\eta}) = \exp(-i\vec{\eta} \cdot \vec{K}) \quad \text{mit} \quad \vec{\eta} = \eta \vec{n}, \quad (2.6.25)$$

wobei

$$K^j = i \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_j^* \\ \vec{e}_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.26)$$

Für die infinitesimale Transformation ist

$$\delta x^0 = \delta \vec{\eta} \cdot \vec{x}, \quad \delta x^j = \delta \eta^j x^0 \Rightarrow \omega_{\rho 0} = -\omega_{0\rho} = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho = 0, \\ -\eta^\rho & \text{für } \rho \in \{1, 2, 3\}, \end{cases} \quad (2.6.27)$$

$$\omega_{00} = \omega_{jk} = 0 \quad \text{für } j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Um die Darstellungsmatrix $S(\Lambda_B)$ zu finden, benötigen wir für die Boosts also

$$\gamma^{0\mu} = \gamma^0 \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu = 0, \\ 2\gamma^0 \gamma^\mu & \text{für } \mu \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \quad (2.6.28)$$

Damit wird

$$\frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \omega_{0\rho} \gamma^{0\rho} = -\frac{1}{2} \gamma^0 \vec{\eta} \cdot \vec{\gamma} =: -i \vec{\eta} \cdot \vec{x}. \quad (2.6.29)$$

Unter Verwendung der Darstellung (2.6.6) ist

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \vec{\gamma} \gamma^0 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.6.30)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß diese Matrix **antihermitesch** und folglich die Darstellung der Boosts

$$S_B[\vec{\eta}] =: S_{\vec{n}}(\eta) = \exp(-i \vec{\eta} \cdot \vec{x}) \quad (2.6.31)$$

nicht unitär ist⁸. Wir werden unten sehen, daß die Lorentztransformationen erst für die Quantenfeldtheorie unitär realisiert werden. Wir können (2.6.31) explizit auswerten, denn es gilt

$$(-i \vec{\eta} \cdot \vec{x})^2 = \frac{1}{4} (\gamma^0 \vec{n} \cdot \vec{\gamma})^2 = -\frac{1}{4} (\vec{n} \cdot \vec{\gamma})^2 = \frac{\vec{n}^2}{4}. \quad (2.6.32)$$

Summiert man also die Exponentialreihe (2.6.31) auf (Übung), folgt

$$S_B(\vec{\eta}) = \gamma^0 \left[\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \gamma^0 - \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) \vec{n} \cdot \vec{\gamma} \right]. \quad (2.6.33)$$

Dies kann man einfacher in der Form

$$S_B(\vec{\eta}) = \gamma^0 \Psi \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) \\ \sinh(\eta/2) \vec{n} \end{pmatrix} \quad (2.6.34)$$

schreiben. In den Komponenten der Vierergeschwindigkeit des Teilchens

$$u = \begin{pmatrix} \cosh \eta \\ \vec{n} \sinh \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad (2.6.35)$$

⁸Die gruppentheoretische Analyse der Darstellungen der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe zeigen, daß es keine nichttrivialen endlichdimensionalen unitären Darstellungen der Lorentzgruppe bzw. der dazugehörigen Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ gibt. Dies liegt daran, daß die Lorentzgruppe im Gegensatz zur Drehgruppe **nicht kompakt** ist. Die Drehgruppe $SO(3)$ bzw. deren Überlagerungsgruppe $SU(2)$ ist hingegen kompakt, und wie wir gleich zeigen werden, wird die Drehgruppe in der Tat durch unitäre Transformationen dargestellt.

ausgedrückt ist

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \\ \vec{n} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.6.36)$$

Wenden wir uns nun den Drehungen zu. Diese transformieren definitionsgemäß nur die räumlichen Komponenten untereinander, d.h. in (2.6.20) ist

$$\omega_{00} = \omega_{0j} = -\omega_{j0} = 0, \quad \omega_{jk} = \epsilon_{jkl} \varphi^l \quad \text{für } j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.6.37)$$

Für infinitesimale Transformationen folgt daraus in der Tat

$$x'^0 = x^0, \quad x'^j = x^j - \epsilon^{jkl} \delta \varphi^l x^k = x^j + (\delta \vec{\varphi} \times \vec{x})^j. \quad (2.6.38)$$

Durch Exponentiation folgt daraus die endliche Drehung zu

$$\vec{x}' = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) + \sin \varphi \vec{n} \times \vec{x} + \cos \varphi P_{\perp}(\vec{n})\vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\vec{\varphi}}{\varphi}. \quad (2.6.39)$$

Weiter ist

$$\gamma^{jk} = - \begin{pmatrix} [\sigma^j, \sigma^k] & 0 \\ 0 & [\sigma^j, \sigma^k] \end{pmatrix} = -2i\epsilon^{jkl} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} =: -4i\epsilon^{jkl} \Sigma^l. \quad (2.6.40)$$

Wir notieren noch

$$\Sigma^l = \frac{i}{8} \epsilon^{jkl} \gamma^{jk} = \frac{i}{4} \epsilon^{jkl} \gamma^j \gamma^k. \quad (2.6.41)$$

Mit (2.6.37) folgt daraus

$$S_D(\vec{\varphi}) = \exp \left(\frac{1}{8} \omega_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \right) = \exp \left(-i\vec{\varphi} \cdot \vec{\Sigma} \right). \quad (2.6.42)$$

Dies macht die hier verwendete Weyl-Darstellung der Diracmatrizen bequem: Der Spinoperator ist Block-diagonal mit den Spinmatrizen $\sigma^l/2$ auf den Diagonalblöcken. Da die $\vec{\Sigma}$ **hermitesche Matrizen** sind, werden Drehungen gemäß (2.6.42) in der Tat **unitär** dargestellt.

Nun kommen wir auf die Diracgleichung (2.6.1) und den Dirac-Spinor ψ zurück. Bezüglich Drehungen setzt sich in unserer chiralen Darstellung der Diracmatrizen der Dirac-Spinor aus zwei **Weyl-Spinoren** gemäß

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} \quad (2.6.43)$$

zusammen. Dabei sind die $\xi_{L,R} \in \mathbb{C}^2$ zweikomponentige Weylspinoren, die sich wegen (2.6.42-2.6.43) unter Drehungen auch als solche transformieren. Dies weist schon darauf hin, daß ein Dirac-Feld stets zwei Spin-1/2-Teilchen beschreibt. Wie wir unten sehen werden, entspricht das wieder einem Teilchen und dem dazugehörigen Antiteilchen.

Aus der Struktur der Dirac-Darstellung der Lorentzgruppe, die sich aus beliebigen Produkten von Boost- und Drehmatrizen (2.6.34) bzw. (2.6.42) ergibt, folgt, daß **Lorentzskalare** mit Hilfe des **Dirac-adjungierten** Zeilenspinors

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (2.6.44)$$

gebildet werden müssen. In der Tat ist dann wegen (2.6.10) aufgrund von (2.6.22)

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0 = \psi^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda). \quad (2.6.45)$$

Daraus folgt sofort, daß

$$\bar{\psi}'(x')\psi(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (2.6.46)$$

gilt, also $\bar{\psi}\psi$ ein **Skalarfeld** ist. Ebenso folgt aus (2.6.13), daß

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) \quad (2.6.47)$$

ein **Vektorfeld** ist. Wir werden später noch weitere bilineare Kombinationen von Diracspinoren konstruieren, die sich wie pseudoskalare, axialvektorielle sowie antisymmetrische Tensorfelder transformieren. Insgesamt ergeben sich dann $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$ linear unabhängige 4×4 -Matrizen, die insgesamt alle möglichen solcher Matrizen, die als kovariante Dirac-Bilinearformen im Spinorraum wirken, aufspannen.

Als nächstes leiten wir aus der Dirac-Gleichung die entsprechende Gleichung für den Dirac-adjungierten Spinor her. Dazu müssen wir nur (2.6.1) hermitesch adjungieren und mit dem Dirac-Adjungierten darstellen:

$$\bar{\psi}(x)\gamma^0(-i\overleftarrow{\mathcal{D}}^{\dagger} - m) = 0. \quad (2.6.48)$$

Dies von rechts mit γ^0 multipliziert liefert wegen der Pseudohermitizitätsrelation (2.6.9)

$$\bar{\psi}(x)(-i\overleftarrow{\mathcal{D}} - m) = 0. \quad (2.6.49)$$

Bilden wir die Viererdivergenz von (2.6.47), folgt mit der Dirac-Gleichung (2.6.1) und ihrer Adjungierten (2.6.49)

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \quad (2.6.50)$$

d.h. die dazugehörige Ladung

$$Q = \int d^3\vec{x}j^0(x) = \int d^3\vec{x}\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \quad (2.6.51)$$

ist **erhalten**. Insofern wählte sich Dirac schon am Ziel, eine konsistente Einteilchen-Interpretation für seine Wellengleichung analog zur nichtrelativistischen Quantenmechanik gefunden zu haben. Allerdings ergeben sich für die ebenen Wellen, die Lösungen für Teilchen mit bestimmtem Impuls entsprechen sollen, wie für die Klein-Gordon-Gleichung stets Lösungen mit positiver und solche mit negativer Frequenz $\omega = \pm E(\vec{k})$. Es stellte sich weiter heraus, daß für die relativistisch konstruierbaren Wechselwirkungen (allen voran die elektromagnetische) bei einer Anfangswellenfunktion, die nur aus der Superposition von Moden mit positiven Frequenzen (also in der Einteilcheninterpretation positiven Energien) gebildet wird, vermöge der Zeitentwicklung zu späteren Zeiten stets Moden mit negativen Frequenzen beigemischt werden. Die Projektion auf Moden positiver Frequenz ist also nicht verträglich mit der Zeitentwicklung, so daß die Moden mit negativer Frequenz notwendig zum Einteilchenhilbertraum der Wellenfunktionen hinzugefügt werden müssen. Dies hat nun notwendig zur Folge, daß die naive Interpretation der Diracgleichung im Sinne der Einteilchenwellenmechanik zu einer Theorie führt, für die der Hamiltonoperator nicht nach unten beschränkt ist, d.h. es existiert kein stabiler Grundzustand. Diracs genialer Ausweg war es, zu postulieren, daß im Grundzustand alle Zustände mit negativer Energie besetzt sind. Dieser **Dirac-See** sollte sich dann in hochenergetischen

Reaktionen bemerkbar machen, die ein Elektron aus dem See herausschlagen können. Dieses **Loch im Diracsee** verhält sich dann wie ein Teilchen mit der Elektronenmasse aber positiver Ladung. Auf diese Weise gelangte Dirac (allerdings nach einigen interpretatorischen Komplikationen) zur Vorhersage der Existenz von **Antiteilchen**. Diese **Löchertheorie** ist äquivalent zu der quantenfeldtheoretischen Auffassung, die wir als nächstes entwickeln werden. Der Einführung des Dirac-Sees entspricht in der Quantenfeldtheorie einfach der **Feynman-Stückelberg-Trick** und die nachfolgende Normalordnung der Observablen wie Energie, Impuls, Ladung usw.

Das Vorgehen entspricht genau dem bei den skalaren Feldern: Wir stellen als erstes eine **lorentz-invariante Lagrangedichte** auf, gehen zum (nicht manifest kovarianten) Hamiltonformalismus über und deuten die kanonischen Feldpoisson-Klammerbeziehungen zu **Antikommutatoren** um. Es stellt sich nämlich heraus, daß Kommutatoren für Dirac-Teilchen nicht zum Ziel führen (insbesondere ergibt sich kein nach unten beschränkter Hamiltonoperator). Dies ist eine Manifestation des oben erwähnten Spin-Statistik-Theorems, wonach Teilchen mit halbzahligem Spin (und Dirac-Teilchen haben, wie wir oben anhand des Verhaltens der Dirac-Spinoren unter Drehungen gesehen haben, Spin 1/2) stets Fermionen sind.

Um die Quantisierung des Feldes vorzubereiten, stellen wir zunächst die Lagrangedichtefunktion auf. Da die Feldgleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, darf die Lagrangedichte die Ableitungen nur linear enthalten. Da wir freie Teilchen beschreiben wollen, muß die Lagrangedichte eine Bilinearform des Dirac-Spinorfeldes sein, und damit die Lorentzinvarianz sichergestellt ist, sollte sie ein Skalarfeld ergeben. Dadurch werden wir auf die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\psi \quad (2.6.52)$$

geführt. Da $\psi \in \mathbb{C}^4$ ist, können wir wieder ψ und $\bar{\psi}$ als voneinander unabhängige Felder betrachten und getrennt voneinander variieren. Die Euler-Lagrangegleichungen ergeben dann in der Tat die Dirac-Gleichung (2.6.1) und die daraus folgende Gleichung für das Dirac-adjungierte Feld (2.6.48).

Zum Übergang zum Hamilton-Formalismus, benötigen wir als nächstes die kanonisch konjugierten Feldimpulse. Es ergibt sich

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger, \quad \bar{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (2.6.53)$$

Auf den ersten Blick sieht dies fatal aus, da offenbar der kanonische Impuls zum adjungierten Feld verschwindet. Dies ist aber lediglich Folge der besonderen Struktur der Lagrangedichte. Man könnte dies beheben, wenn man den Ausdruck in ψ und $\bar{\psi}$ symmetrisiert, was nur um eine totale Divergenz von (2.6.52) verschieden wäre, was im Variationsprinzip keine Änderung für die Feldgleichungen ergibt. Wesentlich ist nur, daß wir die Hamiltondichte mit dem Feldimpuls und dem Feld und seinen räumlichen Ableitungen ausdrücken können, und das ist in der Tat der Fall:

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^0\partial_t\psi - i\bar{\psi}(\rlap{\not{D}} + im)\psi = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi = -\Pi\gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im)\psi. \quad (2.6.54)$$

Die kanonischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\psi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi} = -\gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im)\psi, \quad \dot{\bar{\Pi}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi} = \Pi\left(-\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\overleftarrow{\nabla} + im\right). \quad (2.6.55)$$

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $i\gamma^0$ und Zusammenfassen der Terme auf einer Seite liefert wieder die Diracgleichung (2.6.1). Multiplikation der zweiten Gleichung von rechts her mit

$i\gamma^0$ und Zusammenfassung der Terme liefert die Gleichung (2.6.48) für $\Pi\gamma^0$. Aufgrund der besonderen Struktur der obigen Lagrangedichte ergibt sich der Zusammenhang (2.6.53) zwischen Feld und kanonisch konjugiertem Impuls nicht aus den kanonischen Gleichungen. Es ergibt sich aber keine Inkonsistenz, diese Beziehung einfach als **Nebenbedingung** zu fordern, d.h. wir können

$$\Pi = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger \quad (2.6.56)$$

setzen.

2.7 Quantisierung des freien Dirac-Feldes

Die Quantisierung des Diracfeldes erfolgt nun dadurch, daß wir ψ durch einen Operator ψ ersetzen. Wir fordern nun aber wegen des Spin-Statistik-Theorems keine kanonischen Kommutatorregeln sondern **kanonische Antikommutatorregeln**. Wie wir sehen werden, ist dies kein Widerspruch zur allgemeinen quantentheoretischen Dynamik, denn die Observablen werden stets durch Funktionen aus einer *gerade Anzahl* von Fermionenfeldoperatoren aufgebaut; insbesondere die Hamiltondichte ist eine bilineare Form in den Feldern. Wie wir zeigen werden, erfüllt der dazugehörige Hamiltonoperator die korrekten Kommutatorrelationen mit den Feldern, so daß sich aus der Quantendynamik wieder die Dirac-Gleichung für den Feldoperator ergeben wird, wie es sein muß. Wir verlangen also die **Antikommutator-Relationen zu gleichen Zeiten**

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = i\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b^\dagger(t, \vec{y})\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.7.1)$$

Die $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ numerieren dabei die Dirac-Spinorkomponenten durch.

Wir berechnen nun die Modenentwicklung nach ebenen Wellen. Wir erwarten für die Teilchen und Antiteilchen jeweils zwei Spinfreiheitsgrade (insgesamt also vier Feldfreiheitsgrade für jede Impulsmode). Wie in der relativistischen Teilchenphysik üblich, wird der Spin im Ruhesystem des Teilchens gemessen. Es sei also $\sigma = \pm 1/2$ der Eigenzustand zum Spinoperator $1/2\Sigma^3$ für $\vec{k} = 0$. Es ist sehr zweckmäßig und bequem die übrigen Zustände durch einen drehungsfreien Lorentzboost in Richtung von \vec{k} , d.h.

$$\Lambda_B(\eta\vec{n}) \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \quad \text{mit} \quad \eta = \text{arcosh} \left(\frac{E(\vec{k})}{m} \right), \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{K}, \quad (2.7.2)$$

zu definieren. Dieses Programm führen wir nun aus.

Die korrekte quantenfeldtheoretische Modenentwicklung muß mit dem Feynman-Stückelberg-Trick wie folgt aussehen

$$\psi(x) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{1}{N(\vec{k})} \left[\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^*(x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^*(x) \right]. \quad (2.7.3)$$

Damit diese Funktion die Dirac-Gleichung erfüllt, müssen die Spinoren u und v offenbar den Gleichungen

$$(\not{k} - m)u(\vec{k}, \sigma) = 0, \quad (\not{k} + m)v(\vec{k}, \sigma) = 0 \quad \text{mit} \quad k^0 = E(\vec{k}) \quad (2.7.4)$$

genügen. Es ist klar, daß beide Gleichungen mit der Onshell-Bedingung $k^0 = E(\vec{k})$ verträglich sind, denn multipliziert man die Gleichungen jeweils mit $\not{k} \pm m$, erhält man die Forderung $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = m^2$.

Für $\vec{k} = 0$ erhalten wir die Gleichungen

$$\gamma^0 u(0, \sigma) = u(0, \sigma), \quad \gamma^0 v(0, \sigma) = -v(0, \sigma). \quad (2.7.5)$$

Setzt man die Diracmatrix γ^0 ein, erhält man die linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} u(0, +1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} u'(0, +1/2), & u(0, -1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} u'(0, -1/2), \\ v(0, +1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \sqrt{m} v'(0, +1/2), & v(0, -1/2) &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{m} v'(0, -1/2). \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Die etwas ungewohnte Normierung ist bequem, wie wir gleich noch sehen werden. Jetzt führen wir den Boost (2.7.2) aus. Mit (2.6.36) erhalten wir dabei unter Berücksichtigung von $\gamma = E(\vec{k})/m := E/m$ und den Eigenwertgleichungen (2.7.5) für die Felder bei $\vec{k} = 0$

$$\begin{aligned} u(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2(E+m)}} (m + \not{k}) u'(0, \sigma), \\ v(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2(E+m)}} (m - \not{k}) v'(0, \sigma). \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß dies i.a. *keine* Eigenzustände des Spinoperators Σ^3 sind, da Σ^3 i.a. *nicht* mit dem Boost $S_B(\vec{\eta})$ kommutiert. Vielmehr besitzt konstruktionsgemäß das Teilchen in seinem Ruhssystem eine wohldefinierte Spin-z-Komponente $\sigma \in \{\pm 1\}$.

Für ein masseloses Teilchen wird

$$\begin{aligned} u(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2E}} \not{k} u'(0, \sigma), \\ v(\vec{k}, \sigma) &= \sqrt{\frac{1}{2E}} (-\not{k}) v'(0, \sigma). \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

In diesem Fall repräsentieren diese Zustände für Teilchen, die sich in z-Richtung bewegen, Zustände mit bestimmter **Helizität**. Die Helizität ist dabei als die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung definiert, d.h. der entsprechende Operator ist

$$\mathbf{h} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{k}|}. \quad (2.7.9)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß \mathbf{h} mit den γ^μ vertauscht. Für $\vec{k} = k^3 \vec{e}_3$ ist also

$$\mathbf{h} u(k^3 \vec{e}_3, \sigma) = \sigma u(k^3 \vec{e}_3, \sigma), \quad \mathbf{h} v(k^3 \vec{e}_3, \sigma) = \sigma v(k^3 \vec{e}_3, \sigma). \quad (2.7.10)$$

Für masselose Teilchen sind also u und v Eigenzustände der Helizität in dem Bezugssystem, in dem $\vec{k} \parallel \vec{e}_3$ ist, zu den Eigenwerten $\sigma \in \{-1/2, +1/2\}$.

Für praktische Rechnungen benötigen wir noch die folgenden „Pseudoorthogonalitätsrelationen“

$$\bar{u}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma') = 2m \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad \bar{v}(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma') = -2m \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (2.7.11)$$

$$\bar{u}(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma') = \bar{v}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma') = 0, \quad (2.7.12)$$

$$u(\vec{k}, \sigma)^\dagger u(\vec{k}, \sigma') = 2E \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad v(\vec{k}, \sigma)^\dagger v(\vec{k}, \sigma') = 2E \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (2.7.13)$$

$$u(\vec{k}, \sigma)^\dagger v(-\vec{k}, \sigma') = v(\vec{k}, \sigma)^\dagger u(-\vec{k}, \sigma') = 0. \quad (2.7.14)$$

Diese Gleichungen lassen sich unmittelbar mit einfachen Manipulationen mit den Diracmatrizen und den Eigenwertgleichungen $\gamma^0 u(0, \sigma) = u(0, \sigma)$ und $\gamma^0 v(0, \sigma) = -v(0, \sigma)$ herleiten. In der letzten Gleichung (2.7.14) ist es wichtig zu beachten, daß die Dreierimpulse in diesen Formeln zueinander entgegengesetzt gerichtet sein müssen, d.h. das Argument in einer der beiden Funktionen muß $-\vec{k}$ sein!

Zur Berechnung der Antikommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren versuchen wir die Modenentwicklung (2.7.3) nach $\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma)$ und $\mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma)$ aufzulösen. Dazu notieren wir zunächst

$$\int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) u_{\vec{k}',+}(x) = \int_V d^3 \vec{x} \exp[i(k - k') \cdot x] |_{k^0=E, k'^0=E'} = V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (2.7.15)$$

$$\int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{k},+}^*(x) u_{\vec{k}',+}^*(x) = \int_V d^3 \vec{x} \exp[i(k + k') \cdot x] |_{k^0=E, k'^0=E'} = V \exp(2iEt) \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}. \quad (2.7.16)$$

Multiplizieren wir also die Modenentwicklung (2.7.3) mit $u_{\vec{k},+}(x)$ bzw. mit $u_{\vec{k},+}^*(x)$ und wenden (2.7.13) und (2.7.14) an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) &= \int_V d^3 \vec{x} u^\dagger(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^*(x) \psi(x), \\ \mathbf{b}(\vec{k}, \sigma) &= \int_V d^3 \vec{x} \psi^\dagger(x) v(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},\sigma}^*(x). \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Mit Hilfe der Antikommutatorrelationen für die Felder (2.7.1) und der Orthogonalitätsrelationen (2.7.13-2.7.14) erhalten wir daraus die Antikommutatorrelationen für die Erzeuger und Vernichter

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \right\} &= \left\{ \mathbf{b}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \right\} = 2E(\vec{k}) V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'}, \\ \left\{ \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{a}(\vec{k}', \sigma') \right\} &= \left\{ \mathbf{b}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}(\vec{k}', \sigma') \right\} = 0, \\ \left\{ \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

Zur Berechnung des Hamiltonoperators müssen wir die Hamiltondichte wieder normalordnen. Dabei ist zu beachten, daß wir diesmal die fermionischen Antikommutatorregeln zu berücksichtigen haben, d.h. wir definieren z.B.

$$: \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}', \sigma') := -\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma), \quad (2.7.19)$$

d.h. der normalgeordnete Ausdruck erhält zusätzlich das Vorzeichen der Permutation, die nötig ist, um die Normalordnung aus der ursprünglichen Operatoranordnung herzustellen.

Für die Lösung der Feldgleichungen lautet die Hamiltondichte gemäß (2.6.54)

$$\mathcal{H} =: \bar{\psi}(-i\gamma \cdot \vec{\nabla} + m)\psi =: \bar{\psi}(i\gamma^0 \partial_t - i\vec{\mathcal{D}} + m)\psi(x) =: \psi^\dagger i\partial_t \psi :. \quad (2.7.20)$$

In diese Gleichung die Modenentwicklung (2.7.3) eingesetzt, über \vec{x} integriert und die Orthogonalitätsbeziehungen (2.7.13-2.7.14) angewandt, liefert dann den **positiv semidefiniten Hamiltonoperator**

$$\mathbf{H} = \int_V d^3\vec{x} \mathcal{H} = \sum_{\vec{k}, \sigma} E(\vec{k}) \left[\mathbf{n}_a(\vec{k}, \sigma) + \mathbf{n}_b(\vec{k}, \sigma) \right]. \quad (2.7.21)$$

Ebenso findet man den Ladungsoperator gemäß (2.6.51)

$$\mathbf{Q} = \int_V d^3\vec{x} : \psi^\dagger \psi := \int_V d^3\vec{x} \left[\mathbf{n}_a(\vec{k}, \sigma) - \mathbf{n}_b(\vec{k}, \sigma) \right]. \quad (2.7.22)$$

Man beachte, daß wegen der fermionischen Normalordnungsvorschrift \mathbf{Q} *nicht* positiv definit ist, wie es der hermitesche Ausdruck unter dem Normalordnungssymbol suggeriert. Es ist also wieder nicht die totale Teilchenzahl die Noetherladung der Phaseninvarianz sondern die „Netzteilchenzahl“, also die Differenz zwischen der Anzahl der Teilchen und der Anzahl der Antiteilchen, ganz analog wie beim beladenen Bosefeld. Die **Besetzungszahloperatoren** sind dabei wieder durch

$$\mathbf{n}_a(\vec{k}, \sigma) = \frac{\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}, \sigma)\mathbf{a}(\vec{k}, \sigma)}{2E(\vec{k})V}, \quad \mathbf{n}_b(\vec{k}, \sigma) = \frac{\mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma)\mathbf{b}(\vec{k}, \sigma)}{2E(\vec{k})V} \quad (2.7.23)$$

definiert.

Das Energieeigenwertproblem läßt sich wieder wie beim harmonischen Oszillator lösen, nur daß jetzt wegen der Antikommutatorregeln $\mathbf{a}^2(\vec{k}, \sigma) = \mathbf{b}^2(\vec{k}, \sigma) = 0$ gilt, d.h. die Fockbasis ist durch

$$\left| \{n_a(\vec{k}, \sigma)\}, \{n_b(\vec{k}, \sigma)\} \right\rangle = \prod_{\vec{k}, \sigma} \frac{[\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}, \sigma)]^{n_a(\vec{k}, \sigma)} [\mathbf{b}^\dagger(\vec{k}, \sigma)]^{n_b(\vec{k}, \sigma)}}{\sqrt{N(\vec{k})^{n_a(\vec{k}, \sigma) + n_b(\vec{k}, \sigma)} n_a(\vec{k}, \sigma)! n_b(\vec{k}, \sigma)!}} |\Omega\rangle \quad (2.7.24)$$

mit $n_a(\vec{k}, \sigma), n_b(\vec{k}, \sigma) \in \{0, 1\}$.

Dabei ist $|\Omega\rangle$ wieder der Vakuumzustand, der eindeutig durch

$$\forall \vec{k}, \sigma : \mathbf{a}(\vec{k}, \sigma) |\Omega\rangle = \mathbf{b}(\vec{k}, \sigma) |\Omega\rangle = 0 \quad (2.7.25)$$

definiert ist. Es kann also jeder Einteilchenzustand höchstens von einem Teilchen besetzt sein. Die Antivertauschungsregeln haben somit das **Paulische Ausschließungsprinzip** zur Folge.

2.8 Ideale Fermigase

Die Berechnung der Zustandssumme erfolgt wieder durch direkte Bildung der Spur

$$\begin{aligned} Z(\beta, \mu) &= \text{Tr} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu\mathbf{Q})] \\ &= \prod_{\vec{k}, \sigma} \left(\sum_{n_a(\vec{k}, \sigma)=0}^1 \exp[-\beta(E(\vec{k}) - \mu)n_a(\vec{k}, \sigma)] \right) \\ &\quad \left(\sum_{n_b(\vec{k}, \sigma)=0}^1 \exp[-\beta(E(\vec{k}) + \mu)n_b(\vec{k}, \sigma)] \right) \\ &= \prod_{\vec{k}} \left\{ 1 + \exp[-\beta(E(\vec{k}) - \mu)] \right\}^2 \left\{ 1 + \exp[-\beta(E(\vec{k}) + \mu)] \right\}^2 \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Dabei rührt der erste Faktor unter dem Produkt von den Teilchen, der zweite von den Antiteilchen her, und die Quadrate stammen von den zwei Spinfreiheitsgraden der Teilchen resp. der Antiteilchen. Damit das Produkt konvergiert, muß offenbar wieder $\beta \geq 0$ sein. Für μ ergeben sich im Gegensatz zum bosonischen Fall keine Einschränkungen, d.h. $\mu \in \mathbb{R}$. Das großkanonische Potential erhalten wir durch Logarithmusbildung, und wir können diesmal naiv zum thermodynamischen Limes übergehen, indem wir die Summe über die Impulse durch das entsprechende Integral ersetzen:

$$\Phi(\beta, \mu) = \frac{g_s V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \left\{ \ln \left[1 + \exp \left[-\beta \left(E(\vec{k}) - \mu \right) \right] \right] + \ln \left[1 + \exp \left[-\beta \left(E(\vec{k}) + \mu \right) \right] \right] \right\}. \quad (2.8.2)$$

Dabei haben wir $g_s = 2s + 1 = 2$ gesetzt, um den Spinentartungsfaktor hervorzuheben. Ableiten nach β bzw. $\alpha = -\beta\mu$ liefert für die mittlere Energie und die mittlere Ladung

$$U(\beta, \mu) = \frac{g_s V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} E(\vec{k}) \left\{ f_F[E(\vec{k}) - \mu] + f_F[E(\vec{k}) + \mu] \right\}, \quad (2.8.3)$$

$$Q(\beta, \mu) = \frac{g_s V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{k} \left\{ f_F[E(\vec{k}) - \mu] - f_F[E(\vec{k}) + \mu] \right\}. \quad (2.8.4)$$

Dabei ist

$$f_F(E) = \frac{1}{1 + \exp(\beta E)} \quad (2.8.5)$$

die **Fermi-Dirac-Verteilung**.

Betrachten wir den Limes $T \rightarrow 0$ (also $\beta \rightarrow \infty$) bei $Q = \text{const.}$ Sei o.B.d.A. $Q > 0$, d.h. liege ein Teilchenüberschuß gegenüber Antiteilchen vor. Es ist offenbar

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} f_F(E - \mu) = \Theta(\mu - E). \quad (2.8.6)$$

Innere Energie und Ladung als Funktion des chemischen Potentials μ . Für $Q > 0$ muß offenbar $\mu > m$ sein, d.h. der Beitrag von den Antiteilchen verschwindet, und es sind alle Einteilchenzustände mit Energien $E \leq \mu$ mit je zwei Teilchen (unterschiedlicher Spinstellung) besetzt, und alle Einteilchenzustände mit $E > \mu$ sind unbesetzt. Für mittlere Gesamtenergie und Ladung erhalten wir

$$U_{T=0}(\mu) = \frac{g_s V}{16\pi^2} \left[\mu(\mu^2 - m^2)(2\mu^2 - m^2) - m^4 \operatorname{artanh} \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \underset{m \rightarrow 0}{\cong} \frac{2V}{8\pi^2} \mu^4, \quad (2.8.7)$$

$$Q_{T=0}(\mu) = \frac{g_s V}{6\pi^2} (\mu^2 - m^2)^{3/2} \underset{m \rightarrow 0}{\cong} \frac{2V}{6\pi^2} \mu^3.$$

Für $T > 0$ geben wir nur die Resultate für den masselosen Fall an. Das großkanonische Potential lautet in seinen natürlichen Variablen β und $\alpha = -\mu\beta$ ausgedrückt

$$\Phi(\beta, \alpha) = \beta p V = \frac{g_s V}{360\pi^2 \beta^3} (7\pi^4 + 30\pi^2 \alpha^2 + 15\alpha^4). \quad (2.8.8)$$

Daraus folgt vermöge der Ableitungen nach β bzw. α

$$\begin{aligned} U(\beta, \mu) &= \frac{g_s V}{120\pi^2 \beta^4} \left[7\pi^4 + 30(\beta\mu)^2 + 15(\beta\mu)^4 \right], \\ Q(\beta, \mu) &= \frac{g_s V}{6\pi^2 \beta^2} \mu \left[\pi^2 + (\beta\mu)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

Für $T \ll m$ und $||\mu| - m| \ll m$ erhält man wieder ein klassisches nichtrelativistisches ideales Gas aus vornehmlich Teilchen bzw. Antiteilchen (je nach Vorzeichen von μ), denn dann ist die Besetzungszahldichte für alle Einteilchenzustände klein (d.h. die Fermi-Dirac-Verteilung kann durch eine Boltzmannverteilung genähert werden), und die mittlere Energie pro Teilchen liegt nahe bei m , d.h. die Bewegung kann im nichtrelativistischen Limes behandelt werden.

2.9 Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

Auf den ersten Blick erscheint die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes unproblematisch, denn man kann erwarten, daß es sich um ein ideales Bosegas für masselose Photonen mit zwei Helizitäts- bzw. Polarisationsfreiheitsgraden handelt. Das ist freilich auch der Fall, aber die formale Begründung aus der Quantenfeldtheorie ist nicht ganz so einfach. Der Grund dafür liegt in der Struktur der Darstellungen der **Poincarégruppe** mit $m = 0$. Ohne darauf an dieser Stelle näher eingehen zu können⁹, bemerken wir nur, daß die darstellungstheoretische Analyse verlangt, daß ein masseloses Feld mit Spin $s \geq 1$ stets ein Eichfeld sein muß. Für den Fall $s = 1$, also z.B. Photonen, bedeutet dies, daß die Wirkung unter den **Eichtransformationen**

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \quad (2.9.1)$$

mit einem beliebigen Skalarfeld χ invariant sein muß. Daraus folgt, daß die Lagrangefunktion nur eine Funktion des Tensors zweiter Stufe $\partial_\mu A_\nu$ sein kann, denn es darf A^μ selbst nicht vorkommen, und wir wollen eine Lagrangedichte, die nur von den ersten Ableitungen und nicht höheren Ableitungen der Felder abhängt. Zugleich muß noch die Invarianz unter den Eichtransformationen (2.9.1) gewährleistet sein. Dies ist für den **Faradaytensor**

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.9.2)$$

der Fall. Ein weiterer Tensor, der ebenfalls unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen invariant ist, ist der duale Feldstärketensor

$$(\dagger F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (2.9.3)$$

Dabei bezeichnet $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ das **Levi-Civita-Symbol** im \mathbb{R}^4 , d.h. den vollständig antisymmetrischen $\text{SO}(1,3)^\uparrow$ -Einheitstensor vierter Stufe. Wir folgen dabei der Konvention von [PS95] und setzen

$$\epsilon^{0123} = 1 \Rightarrow \epsilon_{0123} = -1. \quad (2.9.4)$$

Der Vorzeichenwechsel durch das Indexziehen kommt wegen $\det(g^{\mu\nu}) = -1$ zustande. Unter Lorentztransformationen gilt

$$x' = \Lambda x, \quad \epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.9.5)$$

⁹Der Leser sei wieder auf die Literatur [Wei95, Wig39] verwiesen.

d.h. das **Levi-Civita-Symbol** stellt bzgl. der $SO(1,3)$ Tensorkomponenten dar, nicht jedoch unter Lorentztransformationen, für die $\det \Lambda = -1$ ist. Insbesondere wechselt es unter **Raumspiegelungen** das Vorzeichen. Man bezeichnet es daher genauer als den **Levi-Civita-Pseudotensor**. Wir notieren noch die Kontraktionsregeln

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma'} &= -6\delta^{\sigma}_{\sigma'}, \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho'\sigma'} &= -2\left(\delta^{\rho}_{\rho'}\delta^{\sigma}_{\sigma'} - \delta^{\rho}_{\sigma'}\delta^{\sigma}_{\rho'}\right).\end{aligned}\tag{2.9.6}$$

Wir können also aus $F_{\mu\nu}$ und $(\dagger F)_{\mu\nu}$ nur die beiden $SO(1,3)^\uparrow$ -Skalare $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}(\dagger F)^{\mu\nu}$ bilden. Der zweite Ausdruck wechselt aber unter Raumspiegelungen das Vorzeichen, ist also ein Pseudoskalar. Da nach allen empirischen Fakten die elektromagnetische Wechselwirkung die Parität erhält, also invariant unter Raumspiegelungen ist, muß die Lagrangedichte die Gestalt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\tag{2.9.7}$$

besitzen. In der Tat liefert die Variation der Wirkung

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d^4x(\partial_\mu\delta A_\nu)F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\delta A_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}.\tag{2.9.8}$$

Das Hamiltonsche Prinzip verlangt also

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \square A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu.\tag{2.9.9}$$

Freilich kann diese Feldgleichung die Lösung für A^μ nicht eindeutig bestimmen, denn mit jeder Lösung ist ja auch jedes eichtransformierte Feld

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi\tag{2.9.10}$$

für beliebiges $\chi \in \mathbb{R}$ Lösung von (2.9.6). Freilich ist in der klassischen Elektrodynamik nur der Faradaytensor $F_{\mu\nu}$, d.h. die Feldstärken \vec{E} und \vec{B} ein beobachtbares Feld¹⁰ und diese sind unabhängig von der Wahl der Eichung.

Zur Lösung dieses Problems kann man in der klassischen Theorie einfach die Eichung fixieren. Die einfachste Wahl ist die **Lorenzeichung**¹¹

$$\partial_\mu A^\mu = 0.\tag{2.9.12}$$

Dann folgt aus (2.9.9) als Bewegungsgleichung

$$\square A^\mu = 0,\tag{2.9.13}$$

¹⁰ Es gilt

$$F_a^0 = \partial_a A^0 - \partial_0 A^a = -E^a, \quad F_a^b = \partial_a A^b - \partial_b A^a = \epsilon^{abc} B^c,\tag{2.9.11}$$

wobei die Euklidischen Indizes $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.

¹¹ Diese Eichbedingung wurde als erstes von dem dänischen Physiker Ludwig Lorenz und nicht von dem holländischen Physiker Hendrik A. Lorentz angegeben, weshalb wir hier abweichend von der Lehrbuchliteratur die Bezeichnung Lorenzeichung wählen [JO01].

die freilich unter der Lorenz-Eichbedingung (2.9.12) zu lösen ist.

Das Dilemma dabei ist allerdings, daß dies für die Eichung noch nicht vollständig fixiert, denn wir können immer noch die restringierte Eichtransformation

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad \text{mit} \quad \square \chi = 0 \quad (2.9.14)$$

ausführen. Ist dann nämlich A'_μ eine simultane Lösung der Eichbedingung (2.9.12) und (2.9.14), so ist dies wegen der Einschränkung an χ auch für das gemäß (2.9.14) eichtransformierte Feld der Fall.

Wir müssen also eine weitere Forderung stellen, damit die Lösung der Feldgleichungen eindeutig wird. Eine bequeme Wahl für unsere quantenfeldtheoretischen Zwecke ist

$$A^0 = 0. \quad (2.9.15)$$

Damit ist die Eichung vollständig fixiert, und die Wellengleichung mit den Eichfixierungsbedingungen (2.9.12) und (2.9.15) bestimmt das Feld A^μ eindeutig. Diese beiden Bedingungen können offensichtlich auch in der äquivalenten Form

$$A^0 = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0 \quad (2.9.16)$$

geschrieben werden. Man nennt diese die Eichung vollständig fixierenden Bedingungen die **Strahlungseichbedingungen**. Dieser Name rührt daher, daß sie nur für den Fall sich im ladungs- und stromfreien Raum ausbreitender elektromagnetischer Wellen angewandt werden kann. Falls Ladungen und Ströme vorhanden sind, kann nur eine Eichbedingung gestellt werden (z.B. die Lorenz-Eichung (2.9.12) *oder* die **Coulomb-Eichung** $\text{div} \vec{A} = 0$ *oder* die **temporal-axiale Eichung** $A_0 = 0$).

Wie wir sehen, führt jedenfalls die vollständige Eichfixierung durch die Wahl der Strahlungseichung (2.9.16) für das freie Feld dazu, daß die manifeste Lorentz-Kovarianz verloren geht. Dies ist allerdings für die Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen nicht ein so großer Nachteil wie in der Vakuumquantenfeldtheorie, da die manifeste Lorentz-Kovarianz ohnehin aufgrund der Auszeichnung des Ruhesystems des Wärmebads verlorengegangen ist. Wir werden daher in diesem Skript die Coulomb-Eichung¹² (bzw. für das freie Feld in diesem Kapitel die Strahlungseichung) verwenden, wo von vornherein nur die beiden **physikalischen masselosen Feldfreiheitsgrade** quantisiert werden. Für die manifest kovariante Quantisierung ist entweder die **Gupta-Bleuler-Quantisierung** (s. z.B. [Nac86]) oder die auch für nichtabelsche Eichfelder geeignete **kovariante Operatorquantisierung** anzuwenden (vgl. [Kug97]). Eine elegante Alternative stellt die **Faddeev-Popov-Methode** im Rahmen der Pfadintegralquantisierung dar [BL86, PS95, Wei96, Hee02].

Wir gehen also im folgenden von der Lagrangedichte (2.9.7) und der Strahlungseichbedingung (2.9.16) aus:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) F^{\mu\nu}, \quad A^0 = 0, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (2.9.17)$$

Wir arbeiten die erste Zwangsbedingung in die Lagrangedichte ein, was die weitere (nicht mehr manifest kovariante!) Rechnung etwas erleichtert. Nach einigen Umformungen mit Hilfe des dreidimensionalen (Euklidischen) Levi-Civita-Tensors erhalten wir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad \text{mit} \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}}, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad \text{div} \vec{A} = 0. \quad (2.9.18)$$

Wir arbeiten von nun an im **dreidimensionalen Euklidischen Vektorkalkül**.

¹²Die Coulomb-Eichung bietet sich deshalb an, weil sie die im Ruhesystem des Wärmebades vorliegende Rotationssymmetrie respektiert.

Die kanonischen Feldimpulse sind

$$\vec{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \dot{\vec{A}} = -\vec{E} \quad (2.9.19)$$

Damit folgt

$$\mathcal{H} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L} = \vec{E}^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{A}}^2 + (\text{rot } \vec{A})^2 \right] = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (2.9.20)$$

Dies ist in der Tat die aus dem **Poyntingschen Satz** der klassischen Elektrodynamik bekannte **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes**. Die Bewegungsgleichungen und die verbleibende Eichbedingung lauten dann

$$\square \vec{A}(x) = 0, \quad \text{div } \vec{A}(x) = 0. \quad (2.9.21)$$

Bevor wir zur Quantisierung kommen, wollen wir noch kurz das Verhalten der Felder unter Lorentztransformationen in dieser Eichung besprechen. Die naive Transformationsregel ist freilich

$$x' = \Lambda x, \quad A'(x') = \Lambda A(x) = \Lambda A(\Lambda^{-1}x'). \quad (2.9.22)$$

Dann erfüllt aber das transformierte Feld i.a. nicht mehr die Strahlungseichbedingungen (2.9.16). Einzig für die Drehungen erfüllt A' die Eichbedingungen, wenn A sie erfüllt, denn dann ist $A'^0 = A^0 = 0$ und $\text{div}' \vec{A}'(x') = \text{div } \vec{A}(x) = 0$. Für einen drehungsfreien Boost (2.6.23) müssen wir hingegen durch eine geeignete Umeichung die Eichbedingungen wieder herstellen, d.h. das Viererpotential erfüllt die Lorentzinvarianz nur modulo einer Eichtransformation. Dies impliziert, daß beobachtbare Größen **eichinvariant** sein müssen, weil andernfalls die Lorentzinvarianz der Theorie zerstört wäre. Wenden wir uns nun der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes in Coulomb Eichung zu:

Da wir es mit einem Feld mit ganzzahligem Spin $s = 1$ zu tun haben, müssen wir wegen des Spin-Statistik-Theorems wieder mit **Kommutatorregeln** quantisieren. Dabei müssen wir aber beachten, daß die Feldoperatoren die **Coulomb-Eichbedingung**

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (2.9.23)$$

erfüllen müssen. Da weiter das Potential \vec{A} reell ist, führen wir also **selbstadjungierte Feldoperatoren** \vec{A} ein, für die (2.9.23) gilt. Wegen dieser Einschränkung durch die Coulomb-Eichbedingung ist es schwierig, die kanonischen Kommutatorregeln für die Feldoperatoren zu gleichen Zeiten anzugeben. Wir gehen daher umgekehrt vor und suchen zunächst die Lösungen in Form ebener Wellen, um die Modenentwicklung nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren vorzunehmen, d.h. wir setzen an

$$\vec{A}(x) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{2E(\vec{k})V} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left[\mathbf{a}(\vec{k}, \lambda) u_{\vec{k},+}(x) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) u_{\vec{k},+}^*(x) \right]. \quad (2.9.24)$$

Dabei haben wir die **Polarisationsvektoren** $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ reell gewählt. Die Bewegungsgleichungen und die Eichbedingung (2.9.21) verlangen dann

$$E^2(\vec{k}) = \vec{k}^2 \Rightarrow E(\vec{k}) = K, \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = 0. \quad (2.9.25)$$

Zu jedem \vec{k} gibt es also zwei Polarisationsvektoren, die senkrecht auf diesem \vec{k} stehen müssen. Die Summe in (2.9.24) läuft also nur über $\vec{k} \neq 0$. Wir wählen sie orthonormiert zueinander

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.9.26)$$

Es gibt also zu jedem \vec{k} zwei voneinander unabhängige Feldmoden (linear polarisierte ebene Wellen), d.h. $\lambda \in \{1, 2\}$. Es gilt außerdem

$$\sum_{\lambda} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \otimes \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = P_{\perp} \left(\frac{\vec{k}}{K} \right) := \mathbb{1}_3 - \frac{\vec{k} \otimes \vec{k}}{K^2}. \quad (2.9.27)$$

Weiter postulieren wir die Vertauschungsrelationen

$$\left[\mathbf{a}(\vec{k}, \lambda), \mathbf{a}(\vec{k}', \lambda') \right] = 0, \quad \left[\mathbf{a}(\vec{k}, \lambda), \mathbf{a}^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') \right] = 2E(\vec{k})V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda \lambda'}. \quad (2.9.28)$$

Daraus ergibt sich für die Feldkommutatoren nach einer einfachen Rechnung (Übung!)

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{A}_j(t, \vec{x}), \mathbf{A}_k(t, \vec{y}) \right] &= 0, \\ \left[\mathbf{A}_j(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}_k(t, \vec{y}) \right] &= i \sum_{\vec{k}} \frac{1}{V} \left(\delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{K^2} \right) \exp \left[-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \right] =: i\hat{P}_{jk} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.9.29)$$

Dabei erfüllt die rechte Seite explizit die Konsistenzbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mathbf{A}_j(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}_k(t, \vec{y}) \right] = \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\mathbf{A}_j(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}_k(t, \vec{y}) \right] = 0. \quad (2.9.30)$$

Es ergibt sich also eine in sich konsistente Quantenfeldtheorie des freien elektromagnetischen Feldes in Strahlungseichung.

Der Hamiltonoperator ergibt sich unter Berücksichtigung der Normalordnung wieder zu (Übung!)

$$\mathbf{H} = \sum_{\vec{k}, \lambda} E(\vec{k}) \mathbf{n}(\vec{k}, \lambda) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}(\vec{k}, \lambda) = \frac{1}{N(\vec{k})} \mathbf{a}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) \mathbf{a}(\vec{k}, \lambda), \quad (2.9.31)$$

und die Besetzungszahlbasiszustände sind durch

$$\left| \{n(\vec{k}, \lambda)\}_{\vec{k}, \lambda} \right\rangle = \prod_{\vec{k}, \lambda} \frac{\left[\mathbf{a}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) \right]^{n(\vec{k}, \lambda)}}{\sqrt{N(\vec{k})^{n(\vec{k}, \lambda)} n(\vec{k}, \lambda)!}} |\Omega\rangle \quad (2.9.32)$$

gegeben, wobei das Vakuum wieder durch

$$\forall \vec{k}, \lambda: \quad \mathbf{a}(\vec{k}, \lambda) |\Omega\rangle = 0 \quad (2.9.33)$$

charakterisiert ist.

2.10 Hohlraumstrahlung

Im großkanonischen Statistischen Gleichgewichtsoperator ist wieder $\mu = 0$ zu setzen, da es (im wechselwirkenden Fall) wieder keine erhaltene Ladung gibt. Die Zustandssumme ergibt sich wie beim ungeladenen Klein-Gordan-Feld, wobei allerdings durch die zwei Polarisationsfreiheitsgrade alle extensiven

2.10 · Hohlraumstrahlung

Größen (und der Druck!) mit einem Faktor $g_s = 2$ zu multiplizieren sind. Die Verteilungsfunktion ist (im thermodynamischen Limes) eine Bose-Einsteinverteilung für masselose Teilchen

$$n(\vec{k}) = \frac{g_s V}{(2\pi)^3} f_B(K). \quad (2.10.1)$$

Dies liefert, wie nicht anders zu erwarten, die **Planck-Verteilung** für die Energie der Photonen (entsprechend der Frequenz der Wärmestrahlung)

$$n(E) = \frac{g_s V E^2}{2\pi^2} f_B(E), \quad (2.10.2)$$

und die thermodynamischen Größen sind wegen (2.4.11-2.4.12) durch

$$\Phi(\beta, V) = \frac{g_s \pi^2 V}{90 \beta^3}, \quad p = \frac{g_s \pi^2}{90 \beta^4}, \quad U = \frac{g_s \pi^2 V}{30 \beta^4} = 3pV \quad (2.10.3)$$

gegeben.

Kapitel 3

Wechselwirkende Quantenfelder

3.1 Das lineare σ -Modell

Um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, betrachten wir als Beispiel für eine Theorie **wechselwirkender Teilchen** das **lineare σ -Modell**. Es ist auch ein klassisches Beispiel für eine effektive Feldtheorie für **Phasenübergänge**, anhand derer man einige wesentliche damit zusammenhängende Konzepte wie die **spontane Symmetriebrechung** studieren kann. Die **Mean-Field-Näherung** entspricht der einfachsten relativistischen Version der **Ginzburg-Landau-Theorie**.

In seiner einfachsten Version beschreibt dieses Modell ein komplexes mit sich selbst wechselwirkendes Skalarfeld, also **wechselwirkende geladene Skalarbosonen**. Dabei ist die Wechselwirkung so gewählt, daß die Invarianz unter Multiplikation des Feldes mit einem **Phasenfaktor** erhalten bleibt. Weiter wird die Lagrangedichte noch durch die Forderung nach **Dyson-Renormierbarkeit** eingeschränkt. Darauf kommen wir unten noch zu sprechen. Jedenfalls lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{8} (\phi^* \phi)^2. \quad (3.1.1)$$

Die Bewegungsgleichungen für ϕ und ϕ^* erhält man durch Variation der Wirkung nach ϕ^* bzw. ϕ :

$$-(\square + m^2)\phi - \frac{\lambda}{4}\phi^*\phi^2 = 0, \quad -(\square + m^2)\phi^* - \frac{\lambda}{4}\phi(\phi^*)^2 = 0. \quad (3.1.2)$$

Offensichtlich ist diese Lagrangedichte nicht nur invariant unter Poincaré-Transformationen, sondern auch unter der **globalen Eichsymmetrie**

$$\phi'(x) = \exp(i\alpha)\phi(x), \quad \phi'^*(x) = \exp(-i\alpha)\phi^*(x). \quad (3.1.3)$$

Aus der Analyse über das Noethertheorem [Hee02] folgt daraus, daß der Strom

$$j^\mu(x) = \phi^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi(x) \quad (3.1.4)$$

eine Erhaltungsgröße ist. In der Tat rechnet man sofort nach (Übung!), daß aufgrund der Bewegungsgleichungen

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (3.1.5)$$

gilt.

Die kanonische Quantisierung erfolgt formal genau wie im Fall des freien geladenen Klein-Gordon-Feldes. Demnach ist der Hamiltonoperator durch

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : \left[\mathbf{\Pi}^\dagger \mathbf{\Pi} + (\vec{\nabla} \phi^\dagger)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{8} (\phi^\dagger \phi)^2 \right] : \quad (3.1.6)$$

gegeben, wobei wir wieder die Normalordnung durch Doppelpunkte gekennzeichnet haben¹. Ebenso ist der Operator für die Gesamtladung durch

$$\mathbf{Q} = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : (\mathbf{\Pi}^\dagger \phi^\dagger - \mathbf{\Pi} \phi) : \quad (3.1.7)$$

gegeben. Die kanonische Feldquantisierung liefert die Zeitentwicklung der Feldoperatoren im **Heisenbergbild**.

Im Gegensatz zum Fall freier Teilchen können wir allerdings die (operatorwertigen) Bewegungsgleichungen wegen ihrer Nichtlinearität nicht mehr geschlossen lösen und folglich auch nicht das simultane Eigenwertsystem für den Hamiltonoperator und den Ladungsoperator explizit ausrechnen. Daher sind wir auf Näherungsmethoden angewiesen. Die wichtigste Strategie ist, wie in der Vakuum-Quantenfeldtheorie, die **Störungstheorie** und die damit einhergehende Herleitung von **Feynman-Diagrammregeln**, die eine systematische Auswertung der Störungsreihe erlauben.

Unser nächstes Ziel ist es, die Störungsrechnung für die **Zustandssumme** zu entwickeln. Wir werden aber bald sehen, daß die dabei entwickelte Technik wesentlich weiter reicht und auch die näherungsweise Berechnung des dynamischen Verhaltens der Vielteilchensysteme erlaubt. Zur abkürzenden Schreibweise führen wir den **großkanonischen Hamiltonoperator**

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu \mathbf{Q} \quad (3.1.8)$$

ein. Die Zustandssumme lautet dann

$$Z(\beta, \mu) = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{K}). \quad (3.1.9)$$

Die Idee hinter der Störungsentwicklung der Zustandssumme ist die Beobachtung, daß der Operator der Zeitentwicklung für Operatoren im Heisenbergbild bzgl. des großkanonischen Hamiltonoperators

$$\mathbf{U}(t) = \exp(it \mathbf{K}) \quad (3.1.10)$$

lautet und für imaginäre Zeiten $t \in \mathbb{C}$ formal Ähnlichkeit mit dem unnormierten großkanonischen Statistischen Operator besitzt:

$$\exp(-\beta \mathbf{K}) = \mathbf{U}(i\beta). \quad (3.1.11)$$

Die Zeitentwicklung für den Feldoperator lautet im Heisenbergbild

$$\phi(t, \vec{x}) = \mathbf{U}(t) \phi(0, \vec{x}) \mathbf{U}^\dagger(t) = \mathbf{U}(t) \phi(0, \vec{x}) \mathbf{U}^{-1}(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \quad (3.1.12)$$

Wir lesen nun (3.1.12) als Funktion für rein imaginäre Zeiten $t = -i\tau$ mit $\tau \in (0, \beta)$. Es ist dabei zu beachten, daß $\mathbf{U}(t)$ *nur dann unitär ist*, wenn $t \in \mathbb{R}$. Daher definieren wir²

$$\phi^*(\tau, \vec{x}) = \mathbf{U}(-i\tau) \phi^\dagger(0, \vec{x}) \mathbf{U}^{-1}(-i\tau) = \exp(\beta \mathbf{K}) \phi^\dagger(0, \vec{x}) \exp(-\beta \mathbf{K}). \quad (3.1.13)$$

¹Die Normalordnung ist für wechselwirkende Felder zunächst nicht klar definiert, da sie definitionsgemäß die Anordnung der Felder in Produkten über die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren freier Felder festlegt. Erst durch die Formulierung der Theorie im Wechselwirkungsbild, die wir unten einführen werden, erhält die Normalordnungsvorschrift einen wohldefinierten Sinn.

²Wir unterscheiden ansonsten nicht zwischen den Feldoperatoren der reellen und der imaginären Zeitentwicklung. Welcher Operator gemeint ist, wird durch das Zeitargument klar (t : reelle Zeitentwicklung, τ : imaginäre Zeitentwicklung).

Damit haben wir bereits den **Matsubara-Formalismus** oder **Imaginärzeitformalismus** der Statistischen Gleichgewichtsquantenfeldtheorie definiert.

Ebenso definieren wir den Feldoperator im **Wechselwirkungsbild** zu

$$\phi_I(\tau, \vec{x}) = U_0(-i\tau)\phi(0, \vec{x})U_0^{-1}(-i\tau) = \exp(\beta\mathbf{K}_0)\phi(0, \vec{x})\exp(-\beta\mathbf{K}_0), \quad (3.1.14)$$

wobei

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} : \left[\Pi_I^\dagger \Pi_I + (\vec{\nabla}\phi_I^\dagger)(\vec{\nabla}\phi_I) + m^2\phi_I^\dagger\phi_I - i\mu(\Pi_I^\dagger\phi_I^\dagger - \Pi_I\phi_I) \right] : \quad (3.1.15)$$

ist. Hier erfolgt also die Bewegung wie für freie Felder, allerdings mit dem großkanonischen Hamiltonoperator statt dem Hamiltonoperator. Die Felder im Wechselwirkungsbild gehorchen daher bis auf den Zusatzterm zur Berücksichtigung des chemischen Potentials den Bewegungsgleichungen freier Felder und besitzt daher die Modenentwicklung nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Daher besitzt im Wechselwirkungsbild auch die Normalordnung den wohlbestimmten Sinn, daß in Feldoperatorprodukten bei dieser Entwicklung alle Vernichtungsoperatoren nach rechts und alle Erzeugungsoperatoren nach links zu setzen sind. Betrachten wir die reelle Zeitentwicklung, ergibt sich

$$\phi_I(t, \vec{x}) = U_0(t)\phi(0, \vec{x})U_0^{-1}(t). \quad (3.1.16)$$

Da \mathbf{Q} mit \mathbf{H} vertauscht, folgt

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \exp(i\mathbf{H}_0 t)\exp(-i\mu\mathbf{Q}t)\phi_I(0, \vec{x})\exp(i\mu\mathbf{Q}t)\exp(-i\mathbf{H}_0 t). \quad (3.1.17)$$

Betrachten wir also zunächst

$$\phi_\alpha(0, \vec{x}) = \exp(-i\alpha\mathbf{Q})\phi(0, \vec{x})\exp(i\alpha\mathbf{Q}). \quad (3.1.18)$$

Ableiten nach α liefert

$$\frac{d}{d\alpha}\phi_\alpha(0, \vec{x}) = -i[\mathbf{Q}, \phi_\alpha(0, \vec{x})]. \quad (3.1.19)$$

Setzen wir nun \mathbf{Q} gemäß (3.1.7) ein, erhalten wir mit Hilfe der kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\frac{d}{d\alpha}\phi_\alpha(0, \vec{x}) = i\phi_\alpha(0, \vec{x}) \Rightarrow \phi_\alpha(0, \vec{x}) = \exp(i\alpha)\phi(0, \vec{x}). \quad (3.1.20)$$

Dieses Resultat war vom Noethertheorem zu erwarten, denn dieses besagt, daß die zu der Symmetrie gehörige Erhaltungsgröße der Erzeuger der zu der Realisierung durch die Felder gehörigen unitären Darstellung der Symmetrietransformation ist. Dies in (3.1.17) eingesetzt liefert

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \exp(+i\mu t)\exp(i\mathbf{H}_0 t)\phi(0, \vec{x})\exp(-i\mathbf{H}_0 t) = \exp(+i\mu t)\phi_{I, \mu=0}(t, \vec{x}). \quad (3.1.21)$$

Durch hermitesche Adjunktion folgt noch

$$\phi_I^\dagger(t, \vec{x}) = \exp(-i\mu t)\exp(i\mathbf{H}_0 t)\phi^\dagger(0, \vec{x})\exp(-i\mathbf{H}_0 t) = \exp(-i\mu t)\phi_{I, \mu=0}^\dagger(t, \vec{x}). \quad (3.1.22)$$

Die verbleibenden Operatoren entsprechen aber genau den Heisenberg-Feldoperatoren freier Felder, also $\phi_{I, \mu=0}(t, \vec{x})$.

Von nun an arbeiten wir im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$, d.h. wir nehmen stets die Ersetzung

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (3.1.23)$$

vor. Für die Modenentwicklung des geladenen freien Klein-Gordon-Feldes folgt dann aus (2.3.12)

$$\phi_{I,\mu=0}(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{2E(\vec{k})(2\pi)^3}}_{\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k}} \left[\mathbf{a}(\vec{k}) u_{\vec{k},+}(x) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}) u_{\vec{k},+}^*(x) \right]. \quad (3.1.24)$$

Die Umkehrformeln (2.5.8) gelten weiter (mit $V \rightarrow \mathbb{R}^3$), und die Kommutatorregeln (2.5.9) ebenfalls, wobei die Ersetzungsregel

$$V \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \rightarrow (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.1.25)$$

anzuwenden ist:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}(\vec{k}')] &= [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{b}(\vec{k}')] = [\mathbf{b}(\vec{k}), \mathbf{b}(\vec{k}')] = 0, \\ [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}')] &= 0, \quad [\mathbf{a}(\vec{k}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}')] = [\mathbf{b}(\vec{k}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}')] = 2E(\vec{k})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Die Besetzungszahloperatoren werden entsprechend umskaliert

$$\mathbf{n}_a(\vec{k}) = \frac{\mathbf{a}^\dagger(\vec{k})\mathbf{a}(\vec{k})}{2E(\vec{k})(2\pi)^3}, \quad \mathbf{n}_b(\vec{k}) = \frac{\mathbf{b}^\dagger(\vec{k})\mathbf{b}(\vec{k})}{2E(\vec{k})(2\pi)^3}, \quad (3.1.27)$$

und die Operatoren des normalgeordneten freien Hamiltonians bzw. der Ladung sind entsprechend durch

$$\mathbf{H}_{0I} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} E(\vec{k}) [\mathbf{n}_a(\vec{k}) + \mathbf{n}_b(\vec{k})], \quad \mathbf{Q}_I = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} [\mathbf{n}_a(\vec{k}) - \mathbf{n}_b(\vec{k})] \quad (3.1.28)$$

gegeben. Setzen wir die Modenentwicklung (3.1.24) in (3.1.21) und (3.1.22) ein und setzen schließlich $t = -i\tau$, erhalten wir für die Matsubara-Feldoperatoren

$$\phi_I(\tau, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3\vec{k}} \left\{ \mathbf{a}(\vec{k}) \exp[-\tau(E - \mu) + i\vec{k} \cdot \vec{x}] + \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}) \exp[\tau(E + \mu) - i\vec{k} \cdot \vec{x}] \right\}, \quad (3.1.29)$$

$$\phi_I^*(\tau, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3\vec{k}} \left\{ \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) \exp[\tau(E - \mu) - i\vec{k} \cdot \vec{x}] + \mathbf{b}(\vec{k}) \exp[-\tau(E + \mu) + i\vec{k} \cdot \vec{x}] \right\}. \quad (3.1.30)$$

Wir können nun die **Störungsreihe für die großkanonische Zustandssumme** herleiten. Dazu betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Wechselwirkungs- und Heisenbergbild bzgl. der imaginären Zeitentwicklung. Aus (3.1.13) und (3.1.14) folgt

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\tau) \phi_I(\tau) \mathbf{B}(\tau) \quad (3.1.31)$$

mit dem Bildtransformationsoperator

$$\mathbf{B}(\tau) = \exp(\tau \mathbf{K}_{0I}) \exp(-\tau \mathbf{K}). \quad (3.1.32)$$

Um diesen Operator zu berechnen, bilden wir die Ableitung nach τ . Dabei ist zu beachten, daß \mathbf{K}_0 nicht mit \mathbf{K} vertauscht. Wir erhalten

$$\dot{\mathbf{B}}(\tau) = \exp(\tau \mathbf{K}_{0I})(\mathbf{K}_{0I} - \mathbf{K}) \exp(-\tau \mathbf{K}) = \exp(\tau \mathbf{K}_{0I})(\mathbf{K}_{0I} - \mathbf{K}) \exp(-\tau \mathbf{K}_{0I}) \mathbf{B}(\tau). \quad (3.1.33)$$

Da nun der Operator \mathbf{K} im Heisenbergbild zeitunabhängig ist, können wir uns in \mathbf{K} die imaginäre Zeit $\tau = 0$ gesetzt denken. Bei $\tau = 0$ stimmen aber definitionsgemäß Heisenberg- und Wechselwirkungsbild überein, d.h. es ist $\mathbf{K} = \mathbf{K}_I(\tau = 0)$. Die Exponentialfunktionen liefern definitionsgemäß die Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild. Es ist also

$$\dot{\mathbf{B}}(\tau) = [\mathbf{K}_{0I} - \mathbf{K}_{0I}(\tau)]\mathbf{B} = -\mathbf{V}_I(\tau)\mathbf{B}(\tau) \quad (3.1.34)$$

mit

$$\mathbf{V}_I(\tau) = \frac{\lambda}{8} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} : (\phi_I^*(\tau, \vec{x}) \phi_I(\tau, \vec{x}))^2 : . \quad (3.1.35)$$

Wie aus der Quantenmechanik bekannt ist, wird eine solche Gleichung mit Hilfe des **Zeitordnungsoperators** (hier freilich auf die imaginäre Zeit τ bezogen) gelöst:

$$\mathbf{B}(\tau) = \mathcal{T}_\tau \exp \left[- \int_0^\tau d\tau' \mathbf{V}_I(\tau') \right]. \quad (3.1.36)$$

Dabei ist die Exponentialfunktion formal in eine Reihe zu entwickeln, und das Imaginärzeitordnungs-symbol ordnet die entsprechenden Wechselwirkungsoperatoren mit von rechts nach links anwachsenden Imaginärzeitargumenten an.

Nun gilt

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{K}) = \text{Tr} [\exp(-\beta \mathbf{K}_{0I}) \mathbf{B}(\beta)] = Z_0 \left\langle \mathcal{T}_\tau \exp \left[- \int_0^\tau d\tau' \mathbf{V}_I(\tau') \right] \right\rangle_0. \quad (3.1.37)$$

Dabei bedeutet Z_0 die Zustandssumme freier Teilchen, und der Erwartungswert $\langle \dots \rangle_0$ ist bzgl. des freien Statistischen Operators im Wechselwirkungsbild zu nehmen. Die Entwicklung der Exponentialfunktion in (3.1.37) liefert eine formale Reihe nach Potenzen der Wechselwirkung bzw. der Kopplungskonstanten λ . Dies entspricht recht genau der **Dyson-Wick-Entwicklung** der Vakuumquantenfeldtheorie. Allerdings wird hier nicht bzgl. des Vakuumzustandes gemittelt, sondern bzgl. des großkanonischen Statistischen Operators freier Felder. In der Vakuumquantenfeldtheorie führt eine Auswertung dieser Reihe über das **Wick-Theorem** zu den **Feynman-Regeln**. Wie wir nun zeigen werden, gibt es eine exakt analoge Diagrammtechnik auch für die **Matsubara-Störungstheorie**. Es wird sich zeigen, daß die entsprechenden **Matsubara-Diagramme** sehr ähnlichen Regeln wie die Feynman-Regeln der Vakuumquantenfeldtheorie folgen. Aufgrund der imaginären Zeit unterscheidet sich lediglich der Vertexfaktor um einen Faktor von dem im Vakuum, und statt des **Feynman-Propagators** ist der **Matsubara-Propagator** zu verwenden.

Um diese **Matsubara-Diagrammregeln** herzuleiten, betrachten wir zunächst das **erzeugende Funktional** für (freie) **Matsubara-Green-Funktionen**. Diese sind durch

$$\mathcal{D}_n(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \left\langle \mathcal{T}_\tau \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \phi_I^*(x_{n+1}) \cdots \phi_I^*(x_{2n}) \right\rangle_0 \quad (3.1.38)$$

definiert. Dabei bezeichnen wir mit Frakturbuchstaben stets die Matsubara-Green-Funktionen mit *Imaginärzeitargumenten*, d.h. $x_j = (\tau_j, \vec{x}_j)$. Das erzeugende Funktional für diese Funktionen ist durch

$$Z^{(0)}[J, J^*] = \left\langle \mathcal{T}_\tau \exp \left(\left\{ J_1 \phi_1 + J_1^* \phi_1^* \right\}_1 \right) \right\rangle_0 \quad (3.1.39)$$

gegeben. Dabei haben wir die folgende abkürzende Notation für Integrale über imaginäre Zeiten und Raumkomponenten eingeführt:

$$\{f_{123\dots}\}_{123\dots} := \int_0^\beta d\tau_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}_1 \int_0^\beta d\tau_2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}_2 \int_0^\beta d\tau_3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}_3 f(x_1, x_2, x_3, \dots). \quad (3.1.40)$$

Die Größen $J(\tau, \vec{x})$ und $J^*(\tau, \vec{x})$ sind komplexwertige äußere Felder (also keine Operatoren). Schreiben wir nun die Entwicklung der Exponentialfunktion in (3.1.39) aus, sehen wir, daß man wegen der durch den Imaginärzeitordnungoperator festgelegten Operatorordnung die Funktionalableitungen nach den äußeren Feldern in naiver Weise vornehmen kann, d.h. man erhält die Matsubara-Green-Funktionen (3.1.38) mittels Funktionalableitungen:

$$\mathfrak{D}_n(x_1, \dots, x_{2n}) = \left(\frac{\delta^{2n} Z^{(0)}[J, J^*]}{\delta J_1 \cdots \delta J_n \delta J_{n+1}^* \cdots \delta J_{2n}^*} \right)_{J=J^*=0}. \quad (3.1.41)$$

Können wir also das Funktional (3.1.39) berechnen, läßt sich (3.1.37) durch Funktionalableitungen ausdrücken, wenn wir den Wechselwirkungsichteoperator als Funktion der Feldoperatoren

$$\mathcal{V}_I[\phi(x), \phi^\dagger(x)] = \frac{\lambda}{8} : [\phi_I^\dagger(\tau, \vec{x}) \phi_I(\tau, \vec{x})]^2 : \quad (3.1.42)$$

auffassen. Man beachte, daß wir übrigens erst in dieser Darstellung im Wechselwirkungsbild der Normalordnungsvorschrift in diesem Ausdruck einen konkreten Sinn geben können, weil wir im Wechselwirkungsbild die Feldoperatoren explizit durch die Modenentwicklung (3.1.29) und (3.1.30) durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken können:

$$Z = Z_0 \text{Tr} \exp \left[- \left\{ \mathcal{V} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)}, \frac{\delta}{\delta J^*(x)} \right) \right\}_x \right] Z^{(0)}[J, J^*] \Big|_{J=J^*=0}. \quad (3.1.43)$$

Jetzt wollen wir uns mit der konkreten Berechnung des Funktionals $Z^{(0)}[J, J^*]$ befassen. Dazu müssen wir zunächst die Exponentialfunktion (3.1.37) entwickeln. Dann denken wir uns die Feldoperatoren vermöge der Modenentwicklung (3.1.29) und (3.1.30) durch die Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt. Die Spur im Erwartungswert bzgl. des nichtwechselwirkenden großkanonischen Statistischen Operators berechnen wir mit Hilfe der Besetzungszahleigenzustände. Für einen beliebigen Operator im Wechselwirkungsbild gilt³

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{O} \rangle_0 &= \frac{1}{Z_0} \text{Tr}[\exp(-\beta \mathbf{K}_0) \mathbf{O}] \\ &= \frac{1}{Z_0} \sum_{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})} \exp(-\beta K_0[n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})]) \langle \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} | \mathbf{O} | \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Dabei ist

$$K_0[n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})] = \sum_{\vec{k}} \left\{ n_a(\vec{k})[E(\vec{k}) - \mu] + n_b(\vec{k})[E(\vec{k}) + \mu] \right\} \quad (3.1.45)$$

der zum Besetzungszahlzustand $|\{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\}\rangle$ gehörige Eigenwert des freien großkanonischen Hamiltonoperators.

Für die Berechnung des erzeugenden Funktionals für Matsubara-Green-Funktionen (3.1.39) benötigen wir also die Diagonal-Matrixelemente

$$\langle \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} | \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{2n} | \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} \rangle, \quad (3.1.46)$$

³Wir kehren für diese Betrachtung kurz zu einem endlichen Quantisierungsvolumen V zurück.

wobei \mathbf{A}_j irgendwelche Erzeuger $\mathbf{a}^\dagger(\vec{k}_j)$ bzw. $\mathbf{b}^\dagger(\vec{k}_j)$ oder Vernichter $\mathbf{a}(\vec{k}_j)$ bzw. $\mathbf{b}(\vec{k}_j)$ bezeichnen. Es ist klar, daß dieses Matrixelement nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn genausoviele Vernichtungsoperatoren wie Erzeugungsoperatoren, und zwar jeweils für Teilchen und Antiteilchen in der Menge der \mathbf{A}_j enthalten sind, denn Erzeuger (Vernichter) erhöhen (erniedrigen) die Anzahl der Teilchen bzw. Antiteilchen in der betreffenden Mode, und die Besetzungszustände sind definitionsgemäß orthonormiert.

Betrachten wir als einfachstes Beispiel (im thermodynamischen Limes)

$$\begin{aligned} & \langle \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} | \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}_1) \mathbf{a}(\vec{k}_2) | \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} \rangle \\ &= \langle \{ \mathbf{a}(\vec{k}_1) n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k}) \} | \mathbf{a}(\vec{k}_2) | \{n_a(\vec{k}), n_b(\vec{k})\} \rangle = 2E(\vec{k}_1) (2\pi)^3 n(\vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2). \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

Die Summation über alle Zustände gemäß (3.1.44) liefert dann

$$\langle \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}_1) \mathbf{a}(\vec{k}_2) \rangle_0 = 2E(\vec{k}_1) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) f_B[E(\vec{k}) - \mu]. \quad (3.1.48)$$

Zum Beweis betrachten wir die bekannte Formel für die geometrische Reihe

$$s(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n) = \frac{1}{1 - \exp(-\alpha)} = \frac{\exp(\alpha)}{\exp(\alpha) - 1}, \quad \alpha > 0. \quad (3.1.49)$$

Die Ableitung dieser Formel nach α liefert dann

$$s'(\alpha) = - \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\alpha n) = - \frac{\exp(\alpha)}{[\exp(\alpha) - 1]^2}. \quad (3.1.50)$$

Bei der Bildung des Erwartungswertes ist noch durch Z_0 zu dividieren. Außer für \vec{k}_1 kürzen sich dabei alle geometrischen Reihen, die sich durch die Summation der Exponentialfunktionen in (3.1.44) über die $n_a(\vec{k})$ und $n_b(\vec{k})$ entstehen, heraus, und es bleibt nur die in (3.1.48) angegebene Boseverteilung übrig.

Auf ähnliche Weise finden wir die Erwartungswerte

$$\langle \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}_1) \mathbf{a}(\vec{k}_2) \rangle_0 = 2E(\vec{k}_1) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) f_B[E(\vec{k}) - \mu], \quad (3.1.51)$$

$$\langle \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}_1) \mathbf{b}(\vec{k}_2) \rangle_0 = 2E(\vec{k}_1) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) f_B[E(\vec{k}) + \mu], \quad (3.1.52)$$

$$\langle \mathbf{a}(\vec{k}_1) \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}_2) \rangle_0 = 2E(\vec{k}_1) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \{ f_B[E(\vec{k}) - \mu] + 1 \}, \quad (3.1.53)$$

$$\langle \mathbf{b}(\vec{k}_1) \mathbf{b}^\dagger(\vec{k}_2) \rangle_0 = 2E(\vec{k}_1) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \{ f_B[E(\vec{k}) + \mu] + 1 \}. \quad (3.1.54)$$

Es ist auch leicht zu sehen, daß die Erwartungswerte von jeweils zwei Vernichtungs- oder zwei Erzeugungsoperatoren allesamt verschwinden.

Es ist nun klar, wie der allgemeinere Fall (3.1.46) mit $n > 1$ zu berechnen ist: Nach der Mittelwertbildung ergibt jede mögliche Paarung eines Erzeugers und eines Vernichters einen Faktor der Gestalt (3.1.51-3.1.54), und es ist dann über alle möglichen solcher Paarungen zu summieren. Man nennt die Bildung von solchen Paaren **Kontraktionen**, und das soeben hergeleitete **Wicksche Theorem** besagt damit, daß die großkanonischen Erwartungswerte von Feldoperatorprodukten durch die **Summe**

über alle möglichen Kontraktionen gegeben ist. Dies ist analog zu dem Wickschen Theorem in der Vakuumquantenfeldtheorie, nur daß dort sämtliche Erwartungswerte bzgl. des Vakuumzustandes gebildet werden, wobei Kontraktionen über normalgeordnete Feldoperatoren definitionsgemäß verschwinden, da dann alle Vernichtungsoperatoren nach rechts auf den Vakuumzustand wirken, was 0 ergibt. Daher wird das Wick-Theorem für die Zwecke der Vakuum-Theorie oft auch als **Operatoridentität** formuliert. Diese allgemeinere Form benötigen wir für unsere Zwecke jedoch nicht.

Wir benötigen also zur Berechnung von Erwartungswerten imaginärzeitgeordneter Operatorprodukte und insbesondere des erzeugenden Funktionals (3.1.39) die **freie Matsubara-Einteilchen-Green-Funktion**

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2) = \left\langle \mathcal{T}_\tau \phi_I^*(x_1) \phi_I(x_2) \right\rangle_0. \quad (3.1.55)$$

Bevor wir zur Berechnung dieser Funktion übergehen, wollen wir noch einige ihrer Eigenschaften aus dieser Definition herleiten. Zunächst bemerken wir, daß die Imaginärzeitargumente τ_1 und τ_2 allesamt nur im Intervall $[0, \beta]$ benötigt werden. Weiter haben wir für unseren **translationsinvarianten Fall**

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2) = \mathfrak{D}(x_1 - x_2) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D}(x) = \left\langle T_\tau \phi(x) \phi^*(0) \right\rangle_0. \quad (3.1.56)$$

Dabei ist $\mathfrak{D}(\tau, \vec{x})$ für $-\beta < \tau < \beta$ definiert. Weiter folgt aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur für $-\beta < \tau < 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(x) &= \frac{1}{Z_0} \text{tr} \left\{ \exp(-\beta \mathbf{K}_0) \phi_I^*(0) \exp(\tau \mathbf{K}_0) \phi_I(0, \vec{x}) \exp(-\tau \mathbf{K}_0) \right\} \\ &= \frac{1}{Z_0} \text{Tr} \left\{ \exp(-\beta \mathbf{K}_0) \exp[(\tau + \beta) \mathbf{K}_0] \phi_I(0, \vec{x}) \exp[-(\tau + \beta) \mathbf{K}_0] \phi_I^*(0) \right\} \\ &= \frac{1}{Z_0} \text{Tr} \left\{ \exp(-\beta \mathbf{K}_0) \phi_I(\tau + \beta, \vec{x}) \phi^*(0) \right\} = \mathfrak{D}(\tau + \beta, \vec{x}). \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

Das bedeutet, daß innerhalb des Definitionsintervalls $-\beta < \tau < \beta$ die Greensche Funktion $\mathfrak{D}(\tau, \vec{x})$ periodisch mit der Periode $\beta = 1/T$ ist⁴. Da für $0 < \tau < \beta$ (bzw. $-\beta < \tau < 0$) die Operatoren unter der Spur in fester Ordnung auftreten und die Imaginärzeitentwicklung analytisch ist, ist die Funktion in diesen Imaginärzeitintervallen analytisch. Die **Fourier-Darstellung** der Matsubara-Green-Funktion ist also bzgl. τ eine Fourier-Reihe für eine Funktion mit Periode β und bzgl. \vec{k} die übliche Fourier-Integraltransformation (im thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$). Mit der in der thermischen Feldtheorie üblichen Konvention bzgl. der Normierung ergibt dies

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tau, \vec{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) \exp(-i\omega_n \tau + i\vec{k} \cdot \vec{x}) \Leftrightarrow \\ \tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{x}) &= \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \mathfrak{D}(\tau, \vec{x}) \exp(i\omega_n \tau - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \end{aligned} \quad (3.1.58)$$

mit den **bosonischen Matsubara-Frequenzen**

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi T. \quad (3.1.59)$$

⁴Diese Periodizität ist, vor allem im Zusammenhang mit dem **Schwinger-Keldysh-Realzeitformalismus**, auch als **Kubo-Martin-Schwinger-Bedingung (KMS-Bedingung)** bekannt.

Zur Berechnung der Greenschen Funktion selbst benötigen wir zunächst die **Modenentwicklung** der Matsubaraoperatoren. Dazu verwenden wir die Gleichungen (3.1.21-3.1.24) und setzen die Modenentwicklung (3.1.29,3.1.30) für die Imaginärzeitfeldoperatoren ein. Aufgrund der KMS-Bedingung (3.1.57) brauchen wir die freie Matsubara-Green-Funktion nur im Intervall $\tau \in (0, \beta)$ zu berechnen. Mit Hilfe der Erwartungswerte für Erzeugungs-Vernichtungsoperatorprodukte (3.1.51-3.1.54) finden wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tau, \vec{x}) = \langle \phi(\tau, \vec{x}) \phi(0) \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3 k} \{ [1 + f_B(E - \mu)] \exp[i\vec{k} \cdot \vec{x} - \tau(E - \mu)] \\ + f_B(E + \mu) \exp[-i\vec{k} \cdot \vec{x} + \tau(E + \mu)] \}. \end{aligned} \quad (3.1.60)$$

Dabei rührt der erste Term in der Klammer von den Teilchen, der zweite von den Antiteilchen her. Um die Fourierdarstellung zu berechnen, verwenden wir (3.1.58). Nach einigen einfachen Rechnungen folgt

$$\tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2 - (i\omega_n + \mu)^2}. \quad (3.1.61)$$

Wir bemerken, daß dieser Ausdruck für $\mu = 0$ und $T \rightarrow 0$ in den **Propagator der Euklidischen Vakuum-Quantenfeldtheorie** übergeht. Dies ist verständlich, denn für $T \rightarrow 0$ geht ω_n in $\omega \in \mathbb{R}$ über. Da $\beta \rightarrow \infty$ für $T \rightarrow 0^+$, wird zugleich der Periodizitätsbereich ganz \mathbb{R} , so daß wir schließlich zu den Größen der **Euklidischen Vakuum-Quantenfeldtheorie** gelangen, die aus der Formulierung im Minkowskiraum durch die **Wick-Rotation** der Zeitkoordinate um den Winkel $\pi/2$ in der komplexen Zeit-Ebene entsteht:

$$\tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) \underset{\mu, T \rightarrow 0}{\cong} D_E(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2 + \omega^2}. \quad (3.1.62)$$

Nun sind wir endlich in der Lage, das erzeugende Funktional (3.1.37) explizit auszurechnen. Dazu betrachten wir den n -ten Term in der Entwicklung der Exponentialfunktion:

$$Z_n^{(0)}[J, J^*] = \frac{1}{n!} \left\langle \mathcal{T}_\tau \{ (J_1 \phi_{11} + J_1^* \phi_{11}^*) \cdots (J_n \phi_{1n} + J_n^* \phi_{1n}^*) \}_{1 \dots 2} \right\rangle_0. \quad (3.1.63)$$

Hierin trägt aber nur genau derjenige Term bei, für den beim Ausmultiplizieren genau so viele Feldoperatoren ϕ_1 wie ϕ_1^* vorkommen, d.h. es kommt überhaupt nur etwas von 0 verschiedenes heraus, wenn $n = 2j$ mit $j \in \mathbb{N}$ gerade ist. Dann bleibt beim Ausmultiplizieren der Binome nur genau ein Term übrig, dieser aber entsprechend der binomischen Formel $\binom{2j}{j}$ -mal

$$Z_{2j}^{(0)}[J, J^*] = \frac{1}{(2j)!} \binom{2j}{j} \left\langle \mathcal{T}_\tau \{ J_1 \cdots J_j J_{j+1}^* \cdots J_{2j}^* \mathcal{T}_\tau \phi_1 \cdots \phi_j \phi_{j+1}^* \cdots \phi_{2j}^* \}_{1 \dots (2j)} \right\rangle_0. \quad (3.1.64)$$

Nach dem oben hergeleiteten Wickschen Theorem müssen wir nun alle möglichen Kontraktionen bilden und summieren. Es tragen aber nur Kontraktionen zwischen jeweils einem ϕ und einem ϕ^* -Operator auf, und jede mögliche Kontraktion liefert immer denselben Ausdruck (bis auf die Benennung der Integrationsvariablen), nämlich:

$$\left(\{ J_1 \mathfrak{D}_{12} J_2^* \}_{12} \right)^j. \quad (3.1.65)$$

Wir müssen nur noch zählen, auf wieviele Arten, wir die Kontraktionen vornehmen können. Dazu bemerken wir, daß wir mit dem Operator ϕ_1 beginnen können und diesen mit genau j ϕ^* -Operatoren

kontrahieren können. Für ϕ_2 haben wir dann noch $(j - 1)$ mögliche Paarungen usw. Die Gesamtzahl möglicher vollständiger Kontraktionen ist also $j(j - 1) \cdots 1 = j!$. All das eingesetzt und noch die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \quad (3.1.66)$$

für $n = 2j$ und $k = j$ verwendet liefert schließlich

$$Z_{2j}^{(0)}[J, J^*] = \frac{1}{j!} \left(\{J_1 \mathcal{D}_{12} J_2^*\}_{12} \right)^j. \quad (3.1.67)$$

Das vollständige Funktional erhalten wir durch Summation über $j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, und dafür liefert die Exponentialreihe schließlich

$$Z^{(0)}[j, j^*] = \exp \left(\{J_1 \mathcal{D}_{12} J_2^*\}_{12} \right). \quad (3.1.68)$$

3.2 Matsubara-Feynman-Diagramme

Die obigen Überlegungen lassen sich nun auch in eine diagrammatische Sprache übersetzen. Dies ist für die sehr einfache Wechselwirkung mit äußeren Quellen zwar nicht unbedingt von Vorteil, aber es ermöglicht eine wesentlich einfachere Formulierung der Rechenregeln für die störungstheoretische Berechnung der eigentlichen Zustandssumme oder der n -Punkt-Matsubara-Greenfunktionen gemäß (3.1.41). Die Idee der Matsubara-Feynmanregeln ist, die *Rechenoperationen* der Störungsentwicklung durch Diagrammregeln zu ersetzen, was zum einen die Rechnung wesentlich erleichtert, aber auch (in gewissen Grenzen) den einzelnen Termen bzw. Diagrammen eine heuristisch-physikalische Bedeutung verleiht. Diese Bedeutung wird allerdings eher für die reelle Zeitentwicklung deutlich: Demnach beschreibt ein zeitgeordneter Propagator $D(x_1 - x_2) = \langle \mathcal{T} \phi_I(x_1) \phi_I^\dagger(x_2) \rangle_0$ für $t_2 < t_1$ den Prozeß, daß zur Zeit t_2 am Ort \vec{x}_2 ein Teilchen erzeugt (oder ein Antiteilchen vernichtet) und dann zur Zeit t_1 am Ort \vec{x}_1 ein Teilchen vernichtet (bzw. ein Antiteilchen erzeugt) wird. Für $t_1 < t_2$ wird hingegen zunächst zur Zeit t_1 ein Antiteilchen am Ort \vec{x}_1 erzeugt (bzw. ein Teilchen vernichtet) und zur Zeit t_2 am Ort \vec{x}_2 ein Antiteilchen vernichtet (bzw. ein Teilchen erzeugt). Wir beschreiben also mit dem Propagator Übergangsamplituden für die Bewegung von Teilchen, Antiteilchen sowie Teilchenlöchern und Antiteilchenlöchern.

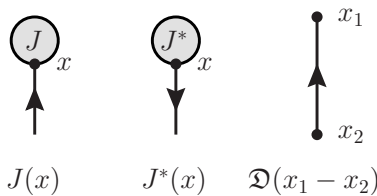


Abbildung 3.1: Matsubara-Feynman-Diagrammelemente für die Berechnung des erzeugenden Funktionals (3.1.68).

Feynmandiagramme symbolisieren nun diese Bewegung von Ladungen (interpretiert in diesem quantenmechanischen Sinn!) in **Raumzeitdiagrammen (Minkowski-Diagrammen)**. In unserer Konvention denken wir uns stets die Zeitrichtung nach oben gerichtet und die Raumrichtung durch die horizontale Richtung auf dem Papier symbolisiert. Dies hat den Vorteil, daß man Feynmandiagramme direkt von oben nach unten lesen kann, denn konventionsgemäß werden in der Quantenfeldtheorie für reelle Zeiten immer Übergangsmatrixelemente $\mathcal{M}_{fi} = \langle \text{Endzustand} | \mathbf{S} | \text{Anfangszustand} \rangle$ berechnet, und wir schreiben Formeln von links nach rechts auf, indem wir die Diagrammelemente von oben nach unten lesen. Entsprechend symbolisieren wir einen Propagator durch einen Pfeil, der zwei Raumzeitpunkte verbindet. Die Richtung des Pfeils gibt gemäß der obigen

Analyse der Bedeutung des Propagators die Richtung des **Ladungsflusses** an.

Im Kontext des Matsubara-Formalismus symbolisieren die Imaginärzeit-Propagatoren die entsprechenden Erwartungswerte bzgl. des großkanonischen Operators. Wir werden allerdings weiter unten noch sehen, wie wir durch analytische Fortsetzung auch dynamische Prozesse behandeln können.

Für die Berechnung des erzeugenden Funktional (3.1.68) in diagrammatischer Formulierung benötigen wir noch Elemente für $J(x)$ und $J^*(x)$. Wie in Abb. 3.1 gezeigt, symbolisieren wir sie durch einen Blob mit einer ein- bzw. auslaufenden Linie. Der Punkt am Blob symbolisiert das Raumzeitargument des jeweiligen Stroms.

Man kann nun die obige analytische Berechnung der einzelnen Reihenentwicklungsglieder (3.1.64) des erzeugenden Funktional diagrammatisch nachvollziehen. Dazu zeichnet man einfach zunächst j Paare von J^* - und J -Blobs hin. Diesem Ausdruck ordnen wir nun entsprechend der Entwicklung der Exponentialfunktion zunächst den Vorfaktor $1/(2j)!$ zu, der aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion stammt. Weiter trägt, wie oben bei der analytischen Rechnung erläutert, von den Termen, die beim Ausmultiplizieren des Produktes aus j Faktoren entstehen, nur genau derjenige bei, bei dem j ϕ_I - und auch j ϕ_I^* -Operatoren enthalten sind. Der entsprechende Binomialkoeffizient ist $\binom{2j}{j} = (2j)!/(j!)^2$. Die Kontraktion erhalten wir nun, indem wir jeweils einen J^* -Blob mit einem J -Blob verbinden, und dabei zählen auf wieviele Arten wir diese Verbindungen vornehmen können, nämlich $j(j-1)\cdots 1 = j!$. Diese Zahl liefert zusammen mit dem besagten Vorfaktor $\binom{2j}{j}/(2j)!$ den **Symmetriefaktor** $1/j!$ des Diagramms. Es ist nun klar, daß gemäß unserer Diagrammregel, die Verbindungslinien für Matsubara-Propagatoren stehen. Weiter müssen wir über alle inneren Punkte integrieren. Dadurch entsteht nun j -mal der gleiche Faktor $\{J_1^* \mathcal{D}_{12} J_2\}_{12}$, und wir erhalten zusammen mit dem Symmetriefaktor wieder (3.1.67), wie es sein muß.

Wir können nun bereits erste „topologische“ Betrachtungen über die Diagramme anstellen: In unserem einfachen Fall einer Wechselwirkung freier Teilchen mit äußeren Quellen, haben wir nur eine Art **zusammenhängendes Diagramm**, eben die Verbindung eines Stromes J mit einem Strom J^* über eine Propagatorlinie. Die überhaupt möglichen Diagramme bestehen aus j solcher zusammenhängender Diagrammteile, und jede zusammenhängende Diagrammkomponente liefert einen Faktor zum Gesamtdiagramm. Dies zeigt einen der großen Vorteile der Diagrammtechnik für die Organisation störungstheoretischer Rechnungen: Wir können zuerst bestimmte **Subdiagramme** berechnen, die wir später für die Berechnung größerer Diagramme benötigen, wobei wir allerdings sorgfältig die kombinatorischen Möglichkeiten zur Kombination der Subdiagramme zum Gesamtdiagramm berücksichtigen müssen. Überhaupt werden wir sehen, daß die Bestimmung der kombinatorischen Faktoren, abgesehen von den Integrationen über die Raumzeitpunkte, den kompliziertesten Teil der Umsetzung von Diagrammen in analytische Ausdrücke darstellen.

Wir wenden uns nun der störungstheoretischen Berechnung der **Zustandssumme** wechselwirkender Teilchen zu. Der Ausgangspunkt dafür ist (3.1.43). Freilich können wir diesen Ausdruck nicht geschlossen ausrechnen, sondern wir müssen die Exponentialfunktion in ihre Potenzreihe entwickeln. Dadurch erhalten wir eine Reihenentwicklung nach Potenzen von λ . Der Funktionaldifferentialoperator ist wegen (3.1.35)

$$-\mathcal{V} \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}, \frac{\delta}{\delta J^*(x)} \right] = -\frac{\lambda}{8} \frac{\delta^4}{\delta J(x)^2 \delta J^*(x)^2} =: -\hat{\mathcal{V}}(x). \quad (3.2.1)$$

Da wir in (3.1.35) nach Ausführung der Ableitung $J = J^* = 0$ zu setzen haben, müssen wir für den Beitrag der n -ten Ordnung der Störungsentwicklung von $Z^{(0)}[J, J^*]$ den Term (3.1.67) mit $j = 2n$ aus der Reihenentwicklung von (3.1.68) verwenden, denn nur dieser ist nach Anwendung der Funktionalableitungsoperatoren frei von J und J^* . Wir erhalten also für den störungstheoretischen Beitrag zur

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2!} \{J_1 \mathcal{D}_{12} J_2\}_{12} \xrightarrow{-\int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{x} \hat{V}(x)} \text{Diagram} \\
 &= -\frac{\lambda}{8} \frac{1}{2!} \int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{x} \mathcal{D}^2(0) \underbrace{\times 2}_{\text{von 1. Ableitung nach } J(x)} \underbrace{\times 2}_{\text{von 1. Ableitung nach } J^*(x)}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.2: Zur Berechnung der Korrektur zur Zustandssumme in 1. Ordnung Störungstheorie.

Zustandssumme der Ordnung λ^n

$$Z^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!n!} \left\{ \hat{\mathcal{V}}_1 \hat{\mathcal{V}}_2 \cdots \hat{\mathcal{V}}_n \left(\{J_{1'} \mathcal{D}_{1'2'} J_{2'}\}^n \right) \right\}_{12 \dots n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (3.2.2)$$

Dabei rührt der Faktor $1/(2n)!$ von der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion $Z^{(0)}$ (3.1.68) und der Faktor $1/n!$ von der Reihenentwicklung des Exponentialdifferentialoperators in (3.1.43) her. Wir stellen den Ausdruck mit den durch Propagatoren verbundenen Strömen J und J^* mit unseren Diagrammen dar. Jede Ableitung nach J bzw. J^* entfernt einen entsprechenden Strom-Blob aus dem Diagramm und setzt das entsprechende Argument des Propagators auf die jeweilige Raum-Zeit-Stelle des J - bzw. J^* -Operators. Dabei müssen wir freilich die Multiplizität, mit der der Stromblob vorkommt, berücksichtigen. Leiten wir also in Abb. 3.2 zunächst nach $J(x)$ ab, so können wir entweder den Strom bei $x_{1'}$ oder den bei $x_{2'}$ entfernen, d.h. es entsteht ein Faktor 2 von dieser ersten Ableitung nach $J(x)$. Die zweite Ableitung nach $J(x)$ entfernt einfach den verbliebenen J -Blob, d.h. es gibt keinen weiteren Faktor. Entsprechend liefert die erste Ableitung nach $J^*(x)$ einen Faktor 2 und entfernt den entsprechenden Blob. Die zweite Ableitung nach $J^*(x)$ entfernt auch noch den verbleibenden Blob ohne weiteren Faktor. Die beiden Propagatorlinien verbinden nun jeweils denselben Raum-Imaginärzeit-Punkt x , und über diesen ist gemäß (3.2.2) zu integrieren.

Nun divergiert aber das räumliche Integral über eine Konstante, und der Propagator ist für $\tau = 0$ ohnehin nicht wohldefiniert. Das erste Problem erklärt sich aus der naiven Anwendung der Regeln für den thermodynamischen Limes $V \rightarrow \infty$, und wir haben das Raumintegral über die Konstante einfach als endlichen Faktor V zu interpretieren. Die Uneindeutigkeit des Propagators für $\tau = 0$ rührt von der Zeitordnung, die wir bei dessen Definition verwendet haben, her. Allerdings ergibt sich der gleiche Raumzeitpunkt für alle Ableitungen daher, daß alle Ableitungen aus ein und demselben $\hat{\mathcal{V}}(x)$ herrühren. Betrachten wir hingegen die direkte Berechnung des besagten Beitrags über Kontraktionen, wird die Operatorordnung in dem betreffenden Ausdruck durch die **Normalordnung** festgelegt. Demnach haben wir also die Matsubara-Propagatorlinien, die in einer Schleife denselben Raumzeitpunkt verbinden⁵, als

$$\mathcal{D}(0) := \langle : \phi(0) \phi^*(0) : \rangle_0 \quad (3.2.3)$$

zu interpretieren. Verwenden wir die Modenentwicklungen (3.1.29-3.1.30), erhalten wir dafür nach

⁵Man spricht dabei in Anlehnung an die ähnliche Situation in der QED von **tadpole-Diagrammen**, obwohl diese Diagramme im linearen Sigma-Modell wenig Ähnlichkeit mit Kaulquappen besitzen.

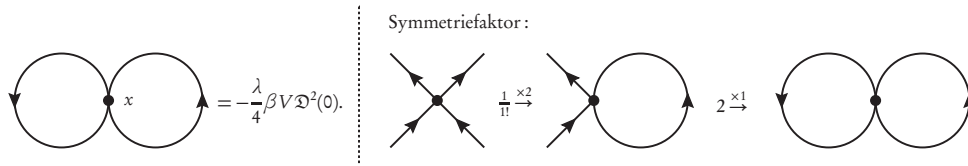


Abbildung 3.3: Zur Berechnung der Korrektur 1. Ordnung zur Zustandssumme.

einigen einfachen Rechnungen die **Tadpole-Regel**

$$\mathfrak{D}(0) = \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3 \vec{k}} \left\{ f_B [E(\vec{k}) - \mu] + f_B [E(\vec{k}) + \mu] \right\}. \quad (3.2.4)$$

Da die Bose-Verteilungen für $|\vec{k}| \rightarrow \infty$ wie $\exp(-\beta|\vec{k}|)$ abfallen, ist das Integral endlich⁶.

Freilich können wir die Diagrammregeln auch direkt auf die störungstheoretischen Korrekturen zur Zustandssumme anwenden. In erster Ordnung ist ja z.B.

$$Z^{(1)} = -\frac{\lambda}{8} \int_0^\beta d\tau \int d^3 \vec{x} \langle : [\phi^*(x)]^2 [\phi(x)]^2 : \rangle_0 \quad (3.2.5)$$

zu berechnen. Dazu zeichnen wir einen Punkt, der den Raumzeitpunkt x symbolisiert, mit zwei auslaufenden Beinen für jeweils ein Feld ϕ^* und zwei einlaufenden Beinen für jeweils ein Feld ϕ (entsprechend den Ableitungen der Blob-Diagramme nach J^* bzw. J). Dieses Diagrammelement ist ein **Vertex** und steht für einen Faktor $-\lambda/8$. Die Kontraktionen verbinden nun jeweils entweder denselben Raumzeitpunkt an einem Vertex oder zwei verschiedene Vertices, wobei immer die Pfeilrichtung zu beachten ist. Ein solcher Pfeil symbolisiert dann stets einen freien Propagator, und die Reihenfolge der Argumente in \mathfrak{D}_{12} ist durch Ablesen **entgegen der Pfeilrichtung** festgelegt, was man auch sofort aus der Bildung der Ableitungen nach den äußeren Strömen J und J^* ersieht. Für gleiche Raumzeitargumente x_1 entsteht $\mathfrak{D}_{11} = \mathfrak{D}(0)$, und es ist wegen der Normalordnungsvorschrift die spezielle Tadpole-Regel (3.2.4) anzuwenden. Schließlich erhält jedes Diagramm n -ter Ordnung (also eines mit n Vertices) einen kombinatorischen Faktor $1/n!$, der von der Entwicklung von $\mathcal{T}_\tau \exp[-\int d^4 x V(x)]$ herrührt. Weiter muß gezählt werden, auf wieviele Arten die Kontraktionen erfolgen können, um genau das durch seine Topologie vorgegebene Diagramm zu erhalten. Da nämlich über alle Raumzeitpunkte gleichermaßen integriert wird, liefert jedes Diagramm der gleichen Topologie mit nur vertauschten Bezeichnungen der Vertexpunkte, denselben Beitrag. Entsprechend brauchen wir jedes Diagramm einer Topologiekategorie nur einmal zu zeichnen, müssen aber die entsprechende Multiplizität berücksichtigen, und die erhält man genau durch das Abzählen der Möglichkeiten die entsprechenden Kontraktionen gemäß dem Wick-Theorem zu bilden.

Im Fall $n = 1$ zeichnen wir also einen Vertex, und wir müssen alle Kontraktionen an diesem einen Vertex ausführen. Der Symmetriefaktor aus der Dysonreihe ist $1/1! = 1$. Dann betrachten wir ein Beinchen (z.B. ein auslaufendes), das notwendig mit einem der zwei gegenläufigen (also hier einem einlaufenden) Beinchen zu verbinden ist. Damit ergibt sich ein Faktor 2 für diese beiden Möglichkeiten. Das verbliebene auslaufende Beinchen kann dann nur noch mit dem einen noch übrigen einlaufenden Beinchen verbunden werden, und wir haben insgesamt einen Symmetriefaktor 2. Es ergibt sich daraus wieder derselbe analytische Ausdruck wie in (3.2). Aufgrund der Translationsinvarianz des Modells

⁶Es ist freilich $|\mu| \leq m$ zu berücksichtigen. Die hier behandelten Diagrammregeln betreffen im folgenden zunächst den Fall, daß kein Bose-Einstein-Kondensat vorliegt. Die Störungsrechnung unter Berücksichtigung eines Bose-Einstein-Kondensats behandeln wir im Abschnitt 3.5.

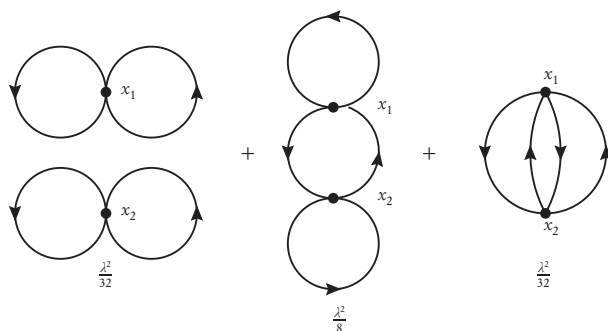


Abbildung 3.4: Diagramme für die Korrektur in zweiter Ordnung Störungstheorie zur Zustandssumme des σ -Modells.

sind alle Einpunktfunktionen, die wir erhalten, wenn wir alle Integrationen über Vertexpunkte eines zusammenhängenden Diagramms bis auf die letzte ausführen, konstant. Es ergibt sich dann bei der letzten Integration wieder das Problem, daß die Raumintegration divergiert. Wie wir oben bereits argumentiert haben, ist hierbei das unendliche Raumintegral durch einen Faktor V für das sehr große (aber endliche) „Behältervolumen“ zu ersetzen.

Es ist eine sehr gute *Übung*, sich dieses Verfahren an der zweiten Ordnung klar zu machen, und zwar indem man einmal die Funktionalableitungen bildet und dann direkt mit den Diagrammregeln rechnet. Wir geben in Abb. 3.4 nur das Resultat mitsamt den entstehenden Faktoren an. Es sollte deutlich geworden sein, daß bei den Diagrammregeln die korrekte Bestimmung des kombinatorischen Faktors das Hauptproblem darstellt (wenn man einmal von den verbliebenen Integrationen über die Raumzeitpunkte der Vertices absieht).

Wir fassen noch einmal die Diagrammregeln für die Berechnung der Korrekturen zur Zustandssumme zusammen:

1. Ein Beitrag zur Störungsentwicklung der Zustandssumme in n -ter Ordnung der Kopplungskonstante entspricht diagrammatisch einem Diagramm mit n Vertices mit jeweils zwei ein- und zwei auslaufenden Beinchen. Jedem Vertex entspricht ein Faktor $(-\lambda/8)$. Das gesamte Diagramm erhält einen Faktor $1/n!$.
2. Es sind stets alle möglichen Paare von ein- und auslaufenden Beinchen zu verbinden, wodurch vollständige Kontraktionen entstehen. Dadurch entstehen in jeder Ordnung Klassen von Diagrammen gleicher Topologie. Jedes Diagramm einer Topologiekategorie trägt entsprechend der Multiplizität bei, die man beim Verbinden der Vertices zu zählen hat.
3. Jedem Pfeil, der zwei unterschiedliche Raumzeit-Punkte verbindet, entspricht dann ein freier Matsubara-Propagator \mathcal{D}_{12} , wobei die Reihenfolge der Argumente entgegen der Pfeilrichtung zu lesen ist.
4. Eine geschlossene Schleife, die denselben Raumzeit-Vertex verbindet, entspricht einem Tadpole-Faktor (3.2.4).
5. In jedem zusammenhängenden Teildigramm mit n' Vertices ist über $n' - 1$ Vertexpunkte zu integrieren, und zwar jeweils mit dem Operator $\int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}$. Die letzte verbleibende Integration über die dann entstehende konstante 1-Punktfunktion entspricht einem Faktor βV .

Als nächstes wollen wir überlegen, wie sich die Korrekturen n -ter Ordnung zur Zustandssumme aus den entsprechenden zusammenhängenden Teildiagrammen zusammensetzen, wobei die wesentliche Schwierigkeit wieder das Abzählen des entsprechenden Symmetriefaktors darstellt. Jedes Diagramm n -ter Ordnung kann sich aus zusammenhängenden Diagrammen mit j Vertices für $1 \leq j \leq n$ zusammensetzen. Sei n_j die Anzahl von zusammenhängenden Diagrammen der Ordnung j , die im Gesamtdiagramm enthalten ist. Die Summe aller zusammenhängenden Diagramm-Beiträge zu Z_j zur Ordnung j werde mit $Z_j^{(c)}$ bezeichnet. Setzen wir

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z_n, \quad (3.2.6)$$

wobei wir den Faktor $1/n!$ aus der Exponentialreihe für (3.1.37) ausgesondert haben. Dann ist

$$Z_n = \prod_{j=0}^n \sum_{n_j \in \mathbb{N}_0} \left[Z_j^{(c)} \right]^{n_j} \frac{n!}{n_j! (j!)^{n_j}} \delta_{n_1 + 2n_2 + \dots + nn_n, n}, \quad (3.2.7)$$

wobei der Bruch mit den Fakultäten berücksichtigt, daß wir die Verteilung der n Vertices auf die zusammenhängenden Teile beliebig vornehmen können, wobei aber die Vertauschung der n_k Vertices und der k identischen Subdiagramme nicht mitgezählt werden dürfen. Das Kronecker- δ stellt sicher, daß insgesamt genau n Vertices vorhanden sind. Summieren wir dies unter Berücksichtigung des Faktors $1/n!$ aus der Exponentialfunktion des Imaginärzeitentwicklungsoperators (3.1.37) über $n \in \mathbb{N}_0$, stellt das Kronecker- δ insgesamt keine Beschränkung mehr dar, und wir erhalten durch Summation der Reihen bzgl. der Summationsvariablen $n_j \in \mathbb{N}_0$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z_n = \exp \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Z_j^{(c)} \right). \quad (3.2.8)$$

Dies ist das **linked-Cluster-Theorem**, demzufolge das **großkanonische Potential** durch die Summe über alle zusammenhängenden Diagramme gegeben ist:

$$\Phi = -\beta\Omega = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} Z_j^{(c)}. \quad (3.2.9)$$

Unsere obige Überlegung bzgl. des Faktors V , der für jede zusammenhängende Diagrammkomponente aus der letzten verbleibenden Integration über die Raumzeitpunkte resultiert, zeigt, daß Φ bzw. Ω Ordnung für Ordnung eine **extensive Größe**, also $\propto V$ ist, wie es sein muß.

Wir betrachten schließlich noch das **erzeugende Funktional** für die **exakten Matsubara-Greenschen Funktionen**. Dabei ist die n -Punktfunktion durch

$$\mathfrak{G}_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \left\langle \mathcal{G}_\tau \phi(x_1) \cdots \phi_{x_n} \phi_{x_{n+1}}^\dagger \cdots \phi^\dagger(x_{2n}) \right\rangle \quad (3.2.10)$$

definiert. Es handelt sich also um den Erwartungswert von zeitgeordneten **Heisenberg-Feldoperatorprodukten** bzgl. des exakten großkanonischen Statistischen Operators.

Wiederholen wir die Betrachtungen bzgl. eines Wechselwirkungsbildes mit dem vollen großkanonischen Heisenberg-Hamiltonoperator als $\mathbf{K}_{0'} = \mathbf{K}$ und der „Störung“

$$\mathbf{K}_V = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} [J(x)\phi(x) + J^*(x)\phi^*(x)], \quad (3.2.11)$$

erhalten wir das erzeugende Funktional für **exakte Greensche Funktionen** als

$$Z[J, J^*] = \left\langle \mathcal{T}_\tau \exp \left[\{J_1 \phi_1 + J_1^* \phi_1^*\}_1 \right] \right\rangle. \quad (3.2.12)$$

Dies können wir aber auch als Zustandssumme bzgl. des explizit zeitabhängigen Heisenbergoperators, der die Wirkung der äußeren Quellen beinhaltet, auffassen:

$$\mathbf{K}_J(\tau) = \mathbf{K}(\tau) + \mathbf{K}_{J'}(\tau). \quad (3.2.13)$$

Dann ist

$$Z[J, J^*] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \mathcal{T}_\tau \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \mathbf{K}_J(\tau) \right] \right\}. \quad (3.2.14)$$

Dies können wir wiederum im gewöhnlichen Wechselwirkungsbild, wo sich die Operatoren mittels des freien großkanonischen Hamiltonoperators \mathbf{K}_{0I} zeitlich entwickeln, ausdrücken. Dazu müssen wir außer dem Potential auch $\mathbf{K}_{J'I}$ als „Störung“ behandeln, d.h. es ist

$$Z[J, J^*] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \exp[-\beta \mathbf{K}_{0I} \mathcal{T}_\tau] \exp \left[- \left\{ \frac{\lambda}{8} (\phi_{1I}^* \phi_{1I})^2 - J_1 \phi_{1I} - J_1^* \phi_{1I}^* \right\}_1 \right] \right\}. \quad (3.2.15)$$

Wir können also $Z[J, J^*]$ mit Hilfe der Diagrammregeln der Störungsrechnung näherungsweise nach Potenzen von λ entwickeln. Der einzige Unterschied ist, daß es zusätzlich zum Vertex mit zwei ein- und zwei auslaufenden Beinchen noch die oben eingeführten J -Blobs mit einem einlaufenden und J^* -Blobs mit einem auslaufenden Beinchen als elementare Diagrammelemente gibt. Jedenfalls ergibt sich die exakte n -Punktfunktion (3.2.10) durch die Ableitung

$$\mathfrak{G}_{2n}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \frac{\delta}{\delta J^*(x_{n+1})} \cdots \frac{\delta}{\delta J^*(x_{2n})} Z[J, J^*] \Big|_{J=J^*=0}. \quad (3.2.16)$$

Es ist klar, daß alle unzusammenhängenden Teile dieser n -Punktfunktion mit mindestens einem äußeren Punkt mit einer ein- und einem äußeren Punkt mit einer auslaufenden Linie verbunden sein muß; \mathfrak{G}_n enthält keine Vakuumsdiagramme. Dies wird in der älteren Literatur als **linke-cluster-Theorem** bezeichnet. Dies läßt sich auch mit einer der obigen Argumentation für die Störungsreihe für Z bzw. Ω ähnlichen kombinatorischen Analyse der Gl. (3.2.15) zeigen: Die nicht mit äußeren Strömen verbundenen Vakuumteile ergeben genau die Zustandssumme, welche sich gegen Z im Nenner weghebt. Hier wird dies durch die triviale Feststellung, daß $Z[J, J^*]|_{J=J^*=0} = 1$ ist ausgedrückt.

Nach dem oben bewiesenen **linked-cluster-Theorem** ergibt sich das erzeugende Funktional für **zusammenhängende Diagramme** durch

$$W[J, J^*] = \ln Z[J, J^*]. \quad (3.2.17)$$

Dabei heißt eine Greensche Funktion zusammenhängend, wenn sie nicht in ein Produkt von Greenschen Funktionen mit niedrigeren n zerfällt. Wir können dies aber auch durch die Differentiation nach den J und J^* nachweisen. Die zusammenhängenden Greenschen Funktionen definieren wir dazu durch

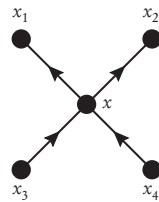
$$\mathfrak{G}_{2n}^{(c)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \frac{\delta}{\delta J^*(x_{n+1})} \cdots \frac{\delta}{\delta J^*(x_{2n})} W[J, J^*] \Big|_{J=J^*=0}. \quad (3.2.18)$$

Der formale Beweis für diese Behauptung findet sich für die einfachere ϕ^4 -Theorie für ein ungeladenes Skalarfeld in [Hee02]. Die Verallgemeinerung auf Theorien mit mehr als einer reellen Feldkomponente (wie hier für ein geladenes Feld mit zwei reellen Komponenten) besteht lediglich in etwas mehr Schreibearbeit und Kombinatorik.

3.3 Die Feynmanregeln im Impulsraum

Im folgenden wollen wir die Feynmanregeln zur Berechnung der Zustandssumme bzw. des großkanonischen Potentials und n -Punktfunktionen im Impulsraum formulieren, wodurch die konkrete Berechnung der einzelnen Beiträge zur Störungsreihe gegenüber der der Raumzeitdarstellung vereinfacht wird. Die Anwendung der Feynmanregeln im Raumzeit-Bereich ist vor allem deshalb kompliziert, weil die von der Imaginärzeitordnung auftretenden Singularitäten von $\mathcal{D}(\tau, \vec{x})$ bei $\tau = 0$ zu berücksichtigen sind [MS59, AGD59, Fra59]. Außerdem wird sich als weitere nützliche Subdiagrammklasse die **einteilchenirreduziblen (1PI) Diagramme** ergeben, aus der wir wiederum wichtige Resummationstechniken für die exakte Zweipunktfunktion herleiten können.

Für Tadpole-Diagramme haben wir mit (3.2.4) bereits eine Impulsraumformulierung angegeben. Wir müssen also nur noch Integrationen über Raumzeitpunkte von Vertices der Form



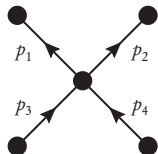
$$\propto \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \prod_{k=1}^2 \mathcal{D}(x_k - x) \prod_{k=3}^4 \mathcal{D}(x - x_k) \quad (3.3.1)$$

durch Summen über die Matsubarafrequenzen $\omega_n = 2\pi T n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und Dreierimpulsintegrale über die Frequenz-Impulsdarstellung des Propagators (3.1.61) ausdrücken. Dabei kann x_k selbst sowohl ein Vertex-Punkt sein, über den schließlich seinerseits zu integrieren ist oder, falls wir keinen störungstheoretischen Korrekturterm zu einer n -Teilchen-Matsubara-Green-Funktion ausrechnen wollen, ein äußerer Punkt. In diesem Fall ist bzgl. dieser Raumzeit-Koordinaten eine Fouriertransformation in den Impulsraum durchzuführen, da wir die Green-Funktionen in der Impulsraumdarstellung ausrechnen wollen, um sie als „Diagrammblöcke“ in komplizierteren Diagrammen benutzen zu können.

Wir setzen also die Fourierentwicklung (3.1.58) in (3.3.1) ein, die wir im folgenden in der abkürzenden Schreibweise

$$\mathcal{D}(x) = \int d^4k \tilde{\mathcal{D}}(k) \exp(-ikx) := T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\mathcal{D}}(k) \exp(-ik \cdot x) \Big|_{k_0 = \omega_n} \quad (3.3.2)$$

notieren, erhalten wir nach der Integration über den inneren Vertex x



$$\propto \int d^4k_1 \cdots \int d^4k_4 (2\pi)^3 \beta \tilde{\delta}^{(4)}(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \tilde{\mathcal{D}}(k_1) \tilde{\mathcal{D}}(k_2) \tilde{\mathcal{D}}(k_3) \tilde{\mathcal{D}}(k_4) \quad (3.3.3)$$

$$\times \exp[-i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_3 - k_4 \cdot x_4)].$$

Dabei haben wir die Abkürzung

$$\tilde{\delta}^{(4)}(k - k') =: \delta_{\omega_n, \omega_{n'}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.3.4)$$

eingeführt.

Es ist nun klar, wie die Feynmanregeln für die Berechnung von beliebigen Matsubara-Feynmandiagrammen zu formulieren sind:

- Man zeichne die Diagramme wie für eine Rechnung im Raumzeit-Bereich hin (einschließlich des entsprechenden kombinatorischen Faktors).
- Jede Linie, die zwei innere oder äußere Vertexpunkte verbindet, ist mit einem Vierer-Impuls zu versehen, wobei die zeitliche Komponente für eine diskrete Matsubara-Frequenz steht. Den Impuls denken wir uns einfachheitshalber in Richtung des Ladungsflusses (also in Pfeilrichtung) gerichtet.
- An jedem inneren Vertex gilt dann die Viererimpulserhaltung: Die Summe der beiden in den Vertex einlaufenden Viererimpulse ist gleich der Summe der beiden auslaufenden Viererimpulse, was durch den Faktor $\beta(2\pi)^3 \tilde{\delta}^{(4)}(K_{\text{ein}} - K_{\text{aus}})$ ausgedrückt wird.
- Innere Linien stehen für freie Matsubara-Greenfunktionen (3.1.61)

$$\tilde{\mathcal{D}}(k) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2 - (i\omega_n + \mu)^2}, \quad (3.3.5)$$

wobei k den entsprechenden Viererimpuls im Diagramm bezeichnet.

- In dem Fall, daß man die Fouriertransformierte eines Beitrags zur n -Teilchen-Matsubara-greenfunktion berechnen will, steht eine äußere ins Diagramm einlaufende (auslaufende) Linie für $\tilde{\mathcal{D}}(-k)$ (bzw. $\tilde{\mathcal{D}}(+k)$).
- Für eine geschlossene Schleife steht weiterhin ein Tadpole-Ausdruck (3.2.4).
- Über alle zu inneren Linien gehörige Impulse ist zu integrieren bzw. über die Matsubara-Frequenzen zu summieren mit dem Operator $\oint d^4k$, wobei nach Abintegration der δ -Distributionen nur die Integrale über die verbleibenden unabhängigen Impulse innerhalb geschlossener **Schleifen** übrigbleiben. Für Diagramme zu Matsubara-Greenfunktionen bleibt ein die Viererimpulserhaltung für das Gesamtdiagramm kennzeichnender Faktor $\beta(2\pi)^3 \tilde{\delta}^{(4)}(K_{\text{ein}} - K_{\text{aus}})$ übrig. Dieser Faktor wird gewöhnlich weggelassen, wenn die n -Teilchen-Green-Funktionen in Viererimpulsdarstellung angegeben werden.
- Für Korrekturen zum großkanonischen Potential Φ , die durch geschlossene zusammenhängende Diagramme dargestellt werden, ist entsprechend der Integration über den letzten Raumzeitpunkt jeweils noch ein Faktor βV hinzuzufügen.

Diese Diagrammregeln sind formal identisch mit denen für die Vakuum-Quantenfeldtheorie, nur daß für innere und äußere Linien statt der **Feynman-Propagatoren** die **Matsubara-Propagatoren** stehen. Weiter fehlt im Matsubara-Formalismus an jedem Vertex ein Faktor i , was vom Übergang zu imaginären Zeitargumenten herrührt. Außerdem wird entsprechend der KMS-Bedingung für die Propagatoren aus den Energieintegralen im Feynmanformalismus die Summe über die diskreten Matsubara-Frequenzen.

Die letztere macht die konkrete Auswertung von Matsubara-Feynman-Diagrammen etwas unbequem. Deshalb beschäftigen wir uns nun mit der **Auswertung von Matsubara-Summen**. Die Idee ist, die Summe über die Matsubarafrequenzen vermöge des Residuensatzes durch ein Integral in der komplexen p_0 -Ebene zu ersetzen. Ist also die gesuchte Reihe

$$R = \frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(i\omega_n) \quad \text{mit} \quad \omega_n = 2n\pi iT, \quad (3.3.6)$$

3.3 · Die Feynmanregeln im Impulsraum

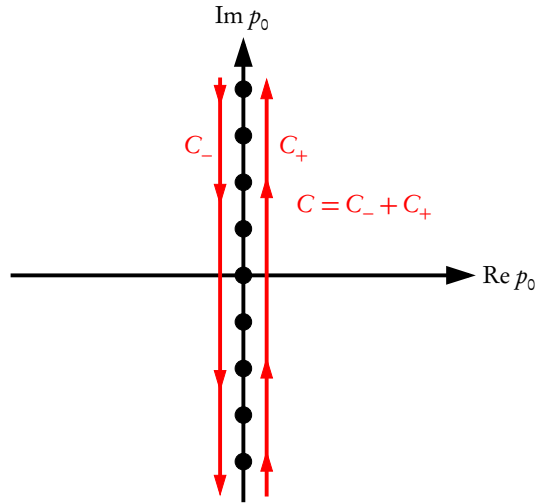


Abbildung 3.5: Integrationsweg zur Berechnung der Matsubarasumme gemäß (3.3.8). Die Punkte auf der imaginären Achse sind die einfachen Pole der Funktion (3.3.7) bei $p_0 = i\omega_n = iT$.

wobei F in einer Streifenumgebung der imaginären Achse p_0 -Ebene analytisch ist, benötigen wir lediglich eine Funktion, die entlang der imaginären Achse einfache Pole bei $p_0 = i\omega_n$ mit Residuum 1 besitzt. Eine solche Funktion ist offenbar

$$f(p_0) = \frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right). \quad (3.3.7)$$

Wir erhalten also

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_C dp_0 F(p_0) \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right), \quad (3.3.8)$$

wobei C den in Abb. 3.5 gezeigten Integrationsweg in der komplexen p_0 -Ebene bezeichnet. Da $\coth(z)$ eine ungerade Funktion ist, können wir das Integral über den Teilweg C_- durch Substitution $p_0 \rightarrow -p_0$ in ein Integral über C_+ ausdrücken. Daraus ergibt sich

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} dp_0 [F(p_0) + F(-p_0)] \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right). \quad (3.3.9)$$

Weiter gilt (Übung!)

$$\frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) = \frac{1}{2} + f_B(p_0). \quad (3.3.10)$$

Damit folgt schließlich aus (3.3.9)

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} dp_0 [F(p_0) + F(-p_0)] \left[\frac{1}{2} + f_B(p_0) \right]. \quad (3.3.11)$$

Wenden wir diese Formel auf die Ausdrücke an, die einer Schleife innerhalb eines Matsubara-Feynman-Diagramms der Störungstheorie entsprechen, erhält man aus dem ersten Term in der eckigen Klammer einen Anteil, der dieser Schleife im Feynman-Diagramm der **Vakuum-Quantenfeldtheorie** entspricht (abgesehen davon daß statt k_0 Ausdrücke mit $k_0 \pm \mu$ entstehen). In diesem Anteil substituieren wir

$p_0 = ik_0$. Dann erhalten wir unter der bereits oben gemachten Annahme, daß F entlang der imaginären Achse keine Singularitäten enthält,

$$R_{\text{vac}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{2} [F(ik_0) + F(-ik_0)]. \quad (3.3.12)$$

In Feynman-Diagrammen entspricht diese präzise dem Ausdruck des entsprechenden Diagramms in der **Euklidischen Vakuumquantenfeldtheorie**. Da über die ganze k_0 -Achse integriert wird, ist dieser Ausdruck auch unabhängig vom chemischen Potential μ , von dem die Matsubara-Green-Funktion (3.3.5) abhängt.

Damit erhalten wir in der Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen dieselben **UV-divergenten Ausdrücke** wie für Schleifenintegrale für Diagramme der Vakuum-Theorie. Diese Divergenzen können durch die in der Vakuumtheorie entwickelten **Renormierungstechniken** beseitigt werden. Wir werden uns in dieser Vorlesung nicht ausführlich mit dieser Theorie beschäftigen, sondern lediglich die Resultate angeben. Die Renormierung relativistischer Quantenfeldtheorien wird in den meisten Lehrbüchern behandelt u.a. in [Wei95, Wei96, PS95, Hee02]. Eine sehr gute Monographie ist [Col86].

Im Zusammenhang mit der Renormierung ist es wichtig, daß für renormierbare Theorien die benötigten Subtraktionen zur Beseitigung der UV-Divergenzen nur die **reinen Vakuumanteile** der divergenten Diagramme betreffen, d.h. die **renormierten Wellenfunktionsnormierungen, Massen und Kopplungskonstanten sind unabhängig von der Temperatur und vom chemischen Potential**. Man macht sich dies wie folgt heuristisch klar: Für den T - und μ -abhängigen Anteil der Matsubarasummenformeln (3.3.11) kann die Integration über k_0 wiederum mit dem Residuensatz ausgeführt werden, indem der Integrationsweg durch einen großen Halbkreis in der rechten Halbebene geschlossen wird. Die rechte Halbebene enthält aber aufgrund der oben begründeten Wahl des Integrationsweges C_+ nur die Pole der Matsubara-Green-Funktionen, auf der positiv reellen p_0 -Achse. Nach dem Residuensatz ergeben sich daher stets wieder Boseverteilungen mit positiv reellem Argument der Form $f_B[E(\vec{k}) \pm \mu]$, und diese fallen im Unendlichen exponentiell ab, so daß die jeweiligen Dreierimpulsintegrale endlich sind, d.h. nur der Vakuumbeitrag enthält Divergenzen.

Dabei ist zu beachten, daß in Rechnungen höherer Ordnungen **überlappende Divergenzen** auftreten können. Dann sind freilich zuerst die entsprechenden Vakuumdivergenzen von Subdiagrammen nach dem **BPHZ-Verfahren** zu subtrahieren, bevor die verbleibende totale Divergenz („overall divergence“) des Diagramms mit T - und μ -**unabhängigen Gegentermen zur Wellenfunktionsnormierung, zur Masse und der Kopplungskonstanten** subtrahiert werden kann (eine ausführliche Darstellung der BPHZ-Renormierung findet sich in [Hee02]). Wir verzichten in dieser Vorlesung auf einen formalen Beweis dieser Aussagen und betrachten weiter unten einige einfache Beispiele, anhand derer das Prinzip deutlich werden wird.

In diesem Zusammenhang bemerken wir, daß im Impulsraum Diagramme faktorisieren, die aus zwei Teilen bestehen, die nur durch eine einzige Propagatorlinie verbunden sind. Daher definiert man als weitere Diagrammklasse die **einteilchenirreduziblen (1PI) zusammenhängenden Diagramme**⁷. Es ist für die weitere Rechnung noch bequem, die den äußeren Beinen entsprechenden Matsubara-Propagatoren herauszudividieren. Solche n -Teilchenfunktionen bezeichnet man als **amputierte Matsubara-Green-Funktionen**.

Die Summe aller **amputierten zusammenhängenden 1PI n -Teilchendiagramme** bezeichnen wir als **n -Teilchenvertexfunktion**:

$$\Gamma_n(p_1, p_2, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{2n})(2\pi)^3 \beta \tilde{\delta}^{(4)}[p_{n+1} + \dots + p_{2n} - (p_1 + \dots + p_n)]. \quad (3.3.13)$$

⁷1PI steht für den entsprechenden englischen Ausdruck „one-particle irreducible“.

Eine Ausnahme ist das entsprechende Einteilchendiagramm, das man als **Selbstenergie** bezeichnet und mit einem anderen Vorzeichen versieht:

$$\Pi(k) = -\Gamma_1(k, k). \quad (3.3.14)$$

Der Grund dafür besteht darin, daß man die exakte Einteilchengreenfunktion, also den exakten Propagator exakt resumieren kann. Der erste Term ist der freie Propagator, der nächste das Selbstenergiediagramm, das seine amputierten äußeren Beinchen zurückerhält, dann zwei Selbstenergiediagramme, die durch eine freie Propagatorlinie verbunden sind usw. Diagrammatisch stellt sich die Situation wie folgt dar:

$$\text{Propagator} = \text{Propagator} + \text{Self-energy diagram} + \text{Two self-energy diagrams} + \dots \quad (3.3.15)$$

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß man dies als geschlossene Gleichung formulieren kann:

$$\text{Propagator} = \text{Propagator} + \text{Self-energy diagram}, \quad (3.3.16)$$

d.h. es gilt

$$\tilde{\mathfrak{D}}(k) = \tilde{\mathfrak{D}}(k) - \tilde{\mathfrak{D}}(k)\tilde{\Pi}(k)\tilde{\mathfrak{D}}(k). \quad (3.3.17)$$

Dies ist die **Dyson-Gleichung**, die sich in unserem Fall skalarer Felder sofort nach dem exakten Propagator auflösen läßt:

$$\tilde{\mathfrak{D}}(k) = \frac{\tilde{\mathfrak{D}}(k)}{1 + \tilde{\mathfrak{D}}(k)\tilde{\Pi}(k)} = \frac{1}{-(i\omega_n + \mu)^2 + \vec{k}^2 + m^2 + \tilde{\Pi}(k)}. \quad (3.3.18)$$

Aufgrund des Faltungssatzes lautet übrigens die Dyson-Gleichung im Raumzeitbereich

$$\mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{D}_{12} - \{\mathfrak{G}_{13}\Pi_{34}\mathfrak{D}_{42}\}_{34}. \quad (3.3.19)$$

Die Selbstenergie verhält sich also wie ein viererimpulsabhängiger Beitrag zu m^2 , woher der etwas unglückliche historisch bedingte Name „Selbstenergie“ rührt. In unserer Vielteilchensituation ist freilich die Selbstenergie auch T - und μ -abhängig.

Als einfachstes Beispiel berechnen wir die Selbstenergiekorrektur zur ersten Ordnung der Störungsrechnung. Diese ist durch das Tadpolediagramm

$$-\tilde{\Pi}^{(1)}(k) = \text{tadpole diagram} = -\frac{\lambda}{2}\mathfrak{D}(0) \quad (3.3.20)$$

gegeben, wobei wir die Tadpolevorschrift (3.2.4) angewendet haben. Hier und im folgenden steht ein Beinchen mit nur einem Raumzeitpunkt an einem Ende für ein amputiertes Beinchen, d.h. es ist der entsprechende Propagatorfaktor wegzulassen. In erster Ordnung Störungstheorie erhalten wir also einen endlichen von k unabhängigen (jedoch von T - und μ -abhängigen!) Beitrag zu m^2 . Daß dieses Diagramm endlich ist, liegt an der Anwendung der Tadpoleregeln, die wir oben aus der **Normalordnungsvorschrift** für den Wechselwirkungsterm gewonnen hatten.

Im Falle von Eichtheorien ist die Normalordnungsvorschrift allerdings problematisch, und es ist einfacher, auf diese zu verzichten. Dann steht die geschlossene Linie für einen Propagator im Impulsraum, und es ergibt sich eine UV-Divergenz vom Vakuumbeitrag zu dem entsprechenden Schleifenintegral. Offensichtlich kann aber der Vakuumbeitrag als **Massenrenormierungsgegenterm** wieder abgezogen werden.

Wir wollen die entsprechende Rechnung explizit ausführen. Die naive Anwendung der Feynmanregeln ergibt

$$\tilde{\Pi}_{\text{nackt}}^{(1)}(k) = \frac{\lambda}{2} \int d^4k \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2 - (i\omega_n + \mu)^2}. \quad (3.3.21)$$

Dabei haben wir einen Index „nackt“ hinzugefügt, der andeuten soll, daß es sich um einen (i.a. divergenten) **unrenormierten Ausdruck** handelt. Wir können uns diesen Ausdruck dadurch **regularisiert** denken, daß wir nur bis zu einem endlichen **euklidischen Viererimpulsbetrag** Λ integrieren. Erst *nach* der **Renormierung** können wir den Grenzwert $\Lambda \rightarrow \infty$ bilden. Verwenden wir (3.3.12) ergibt sich dieser Vakuumanteil zu

$$\tilde{\Pi}_{\text{nackt, vac}}^{(1)}(k) = \frac{\lambda}{2} \int_{l^2 < \Lambda^2} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{E^2(l) - (il_0 + \mu)^2}. \quad (3.3.22)$$

Wir können die l_0 -Integration entlang der reellen Achse deformieren auf die zur reellen Achse parallelen Geraden $i\mu + \mathbb{R}$, denn die Pole des Integranden liegen bei $l_0 = i(\mu \pm E)$. Damit wird (3.3.22) zu

$$\tilde{\Pi}_{\text{nackt, vac}}^{(1)}(k) = \frac{\lambda}{32\pi^4} \Omega_3 \int_0^\Lambda dL \frac{L^3}{L^2 + m^2}. \quad (3.3.23)$$

Wir haben vierdimensionale Kugelkoordinaten eingeführt. Mit der 3D-Oberfläche der dreidimensionalen Einheitskugelschale $\Omega_3 = 2\pi^2$ im \mathbb{R}^4 erhalten wir

$$\tilde{\Pi}_{\text{nackt, vac}}^{(1)}(k) = \frac{\lambda}{32\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right) \right]. \quad (3.3.24)$$

Wie vom „oberflächlichen Divergenzgrad“ des Diagramms her zu erwarten divergiert dieser Ausdruck quadratisch mit dem Abschneideimpuls Λ . Da dieser divergierende Beitrag zur Selbstenergie konstant bzgl. k ist, können wir ihn einfach als **Massengegenterm** abziehen. In diesem **physikalischen Renormierungsschema** bezeichnet der Parameter m dann die physikalische **Masse der Teilchen im Vakuum**.

Der Mediumanteil des Diagramms ist

$$\tilde{\Pi}_{\text{med}}^{(1)}(k) = -\frac{i\lambda}{32\pi^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3l \int_{C^+} dl_0 \left[\frac{1}{E^2(\vec{l}) - (l_0 + \mu)^2} + \frac{1}{E^2(\vec{l}) - (l_0 - \mu)^2} \right] f_B(l_0). \quad (3.3.25)$$

3.4 · Effektive Wirkung

Da C^+ die infinitesimal nach rechts verschobene Gerade parallel zur imaginären Achse in der p_0 -Ebene ist und die Propagatorfunktionen in der eckigen Klammer wie $1/p_0^2$ im Unendlichen abfallen, können wir die Kontur mit einem unendlich großen Halbkreis in der rechten p_0 -Ebene schließen. Da $f_B(p_0)$ in der rechten Halbebene keine Pole besitzt, tragen nur die Pole der Propagatoren auf der positiven reellen Achse zum Residuensatz bei. Diese liegen bei

$$p_0 = E(\vec{k}) - \mu, \quad p_0 = E(\vec{k}) + \mu. \quad (3.3.26)$$

Diese beiden Pole sind positiv, da wir stets voraussetzen, daß $|\mu| < m$ ist und $E(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} > m$ gilt. Bei der Anwendung des Residuensatzes ist weiter zu beachten, daß der geschlossene Integrationsweg im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, so daß wir einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel berücksichtigen müssen. Das Resultat ist

$$\tilde{\Pi}_{\text{ren}}^{(1)}(k) = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3\vec{l}} \left\{ f_B [E(\vec{l}) - \mu] + f_B [E(\vec{l}) + \mu] \right\}. \quad (3.3.27)$$

Dies stimmt gemäß (3.3.20) aufgrund der Tadpoleregeln (3.2.4) mit dem über die Normalordnung renormierten Ergebnis überein. Die Normalordnung ist also in diesem Sinne eine bestimmte Wahl des Renormierungsschemas für Tadpole-Diagramme: Der Vakuumanteil der Tadpole-Beiträge ist wegen der Normalordnung zu subtrahieren. Dies ist auch unmittelbar klar, da Vakuumerwartungswerte von normalgeordneten Produkten verschwinden.

Nun können wir auch die Korrektur erster Ordnung zum großkanonischen Potential angeben, das durch das „Achtendiagramm“ in Abb. 3.3 gegeben ist. Unter Berücksichtigung des Symmetriefaktors und des zusätzlichen Faktors βV für geschlossene Diagramme finden wir

$$\Omega^{(1)} = T\Phi^{(1)} = \frac{V}{\lambda} \left[\tilde{\Pi}_{\text{ren}}^{(1)}(k) \right]^2. \quad (3.3.28)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß der Selbstenergiebeitrag $\propto \lambda$ ist, so daß wir nach dem Quadrieren wieder einen λ -Faktor herausdividieren müssen. Da die Selbstenergie von der Dimension Energie zum Quadrat ist und in unseren natürlichen Einheiten V von der Dimension (inverse Energie)³, besitzt (3.3.28) die korrekte Dimension einer Energie.

Hinsichtlich der Renormierung ist zu sagen, daß hier beide Schleifenintegrale renormiert wurden, wie es die BPHZ-Regeln vorschreiben.

3.4 Effektive Wirkung

Wir haben oben gesehen, daß wir für die *exakten* Matsubara-Green-Funktionen das erzeugende Funktional (3.2.15)

$$Z[J, J^*] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left\{ \exp [-\beta \mathbf{K}_{\text{OI}} \mathcal{F}_\tau] \exp \left[- \left\{ \frac{\lambda}{8} (\phi_{11}^* \phi_{11})^2 - J_1 \phi_{11} - J_1^* \phi_{11}^* \right\}_1 \right] \right\} \quad (3.4.1)$$

definieren können. Die n -Teilchen Matsubara-Green-Funktion ist dann durch die Funktionalableitung

$$\mathfrak{G}_{2n}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \frac{\delta}{\delta J^*(x_{n+1})} \cdots \frac{\delta}{\delta J^*(x_{2n})} Z[J, J^*] \Bigg|_{J=J^*=0} \quad (3.4.2)$$

gegeben. Wir haben dann gezeigt, daß das erzeugende Funktional für die **zusammenhängenden Matsubara-Green-Funktionen** durch

$$W[J, J^*] = \ln Z[J, J^*] \quad (3.4.3)$$

gegeben ist.

Nun suchen wir ein erzeugendes Funktional für die **exakten Vertexfunktionen**, die durch die einteilchenirreduziblen zusammenhängenden amputierten Diagramme definiert sind. Dazu betrachten wir zunächst die Theorie mit äußeren Quellen $J(x)$ und $J^*(x)$. Es ist klar, daß dann der **Erwartungswert für die Felder** i.a. nicht von 0 verschieden ist

$$\langle \phi(x) \rangle_{JJ^*} = \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J(x)} =: \varphi_J(x), \quad \langle \phi^*(x) \rangle_{JJ^*} = \frac{\delta W[J, J^*]}{\delta J^*(x)} =: \varphi_J^*(x). \quad (3.4.4)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß bei der Berechnung des Erwartungswertes die Zustandssumme bzgl. des exakten großkanonischen Hamiltonoperators einschließlich der Beiträge mit den äußeren Strömen zu bilden ist, so daß auch die Normierung durch die Zustandssumme Z_{JJ^*} unter Einbeziehung dieser äußeren Ströme vorzunehmen ist. Dieser Normierungsfaktor wird aufgrund von (3.4.3) durch die Ableitungen von W aufgrund des Logarithmusses automatisch berücksichtigt.

Wir bilden nun durch **funktionale Legendretransformation** die **effektive Wirkung**

$$\Gamma[\varphi, \varphi^*] = W[J_\varphi, J_\varphi^*] - \left\{ \varphi_1 J_{\varphi 1} + \varphi_1^* J_{\varphi 1}^* \right\}_1. \quad (3.4.5)$$

Dabei haben wir die Ströme J_φ und J_φ^* auf der rechten Seite der Gleichung so zu wählen, daß $\varphi_J = \varphi$ und $\varphi_J^* = \varphi^*$ wird. Die Variation von (3.4.5) liefert dann aufgrund von (3.4.4)

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_1^*} \delta \varphi_1^* \right\}_1 &= \left\{ \frac{\delta W}{\delta J_1} \delta J_1 + \frac{\delta W}{\delta J_1^*} \delta J_1^* - (\delta \varphi_1 J_1 + \varphi_1 \delta J_1 + \delta \varphi_1^* J_1^* + \varphi_1^* \delta J_1^*) \right\}_1 \\ &= - \left\{ \delta \varphi_1 J_1 + \delta \varphi_1^* J_1^* \right\}_1. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Es gilt also

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_1} = -J_1, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_1^*} = -J_1^*. \quad (3.4.7)$$

Haben wir also umgekehrt das Funktional $\Gamma[\varphi, \varphi^*]$ vorgegeben, ergeben sich die Felder φ und φ^* bei vorgegebenen Strömen als Lösungen φ_J und φ_J^* der **Bewegungsgleichungen** (3.4.7). Daraus können wir wieder das erzeugende Funktional W für zusammenhängende Matsubara-Green-Funktionen durch die umgekehrte Legendretransformation

$$W[J, J^*] = \Gamma[\varphi_J, \varphi_J^*] + \left\{ \varphi_J J_1 + \varphi_J^* J_1^* \right\} \quad (3.4.8)$$

bestimmen. Wir wollen nun zeigen, daß in der Tat Γ das erzeugende Funktional für die Vertexfunktionen ist. Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl der Raumzeitargumente. Nun ist klar, daß die zusammenhängenden Matsubara-Green-Funktionen bei vorhandenen äußeren Quellen nicht notwendig $2n$ -Punktfunktionen sein müssen. Wir definieren daher etwas allgemeiner

$$G_{J; n, n^*}^{(c)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n^*}) = \frac{\delta^{n+n^*} W[J, J^*]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n) \delta J(y_1) \cdots \delta J(y_{n^*})}. \quad (3.4.9)$$

Die Vertexfunktionen definieren wir durch

$$\Gamma_{n^*,n}(x_1, \dots, x_{n^*}, y_1, \dots, y_n) = \frac{\delta^{n+n^*} \Gamma}{\delta \varphi^*(x_1) \cdots \delta \varphi^*(x_{n^*}) \delta \varphi(y_1) \cdots \delta \varphi(y_n)}. \quad (3.4.10)$$

Für die Einpunktfunktionen gilt aufgrund der Kettenregel, angewandt auf (3.4.8) und der Definition der φ_J und φ_J^* als Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.4.7)

$$G_{J;1,0}^{(c)}(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \varphi_J(x), \quad G_{J;0,1}^{(c)}(x) = \frac{\delta W}{\delta J^*(x)} = \varphi_J^*(x). \quad (3.4.11)$$

Dies zeigt lediglich die Konsistenz der Definition der Funktionale, was freilich durch die Legendre-Transformationen automatisch gesichert ist. Betrachten wir nun die Zweipunktfunktionen. Bilden der Funktionalableitung von (3.4.8) nach J_1 und J_2^* liefert mit Hilfe der Kettenregel

$$\left\{ \Gamma_{2,0}(x_1, x_2') \mathfrak{G}_{J;2,0}^{(c)}(x_2', x_2) + \mathfrak{G}_{J;1,1}^{(c)}(x_2, x_2') \Gamma_{1,1}(x_2', x_1) \right\}_{2'} = -\delta_{12}. \quad (3.4.12)$$

Setzen wir $J = J^* = 0$, verschwindet der erste Term, da in dem Fall nur die üblichen n -Teilchen-Greenfunktionen von 0 verschieden sind, d.h. solche mit Index n, n . Dann besagt aber (3.4.12), daß $\Gamma_{1,1}$ im funktionalen Sinne invers zum exakten zusammenhängenden Propagator $\mathfrak{G}^{(c)}$ ist. Wegen der Translationsinvarianz hängt sowohl der Propagator als auch $\Gamma_{1,1}$ nur von der Differenz ihrer Argumente ab, und die Gleichung (3.4.12) ergibt

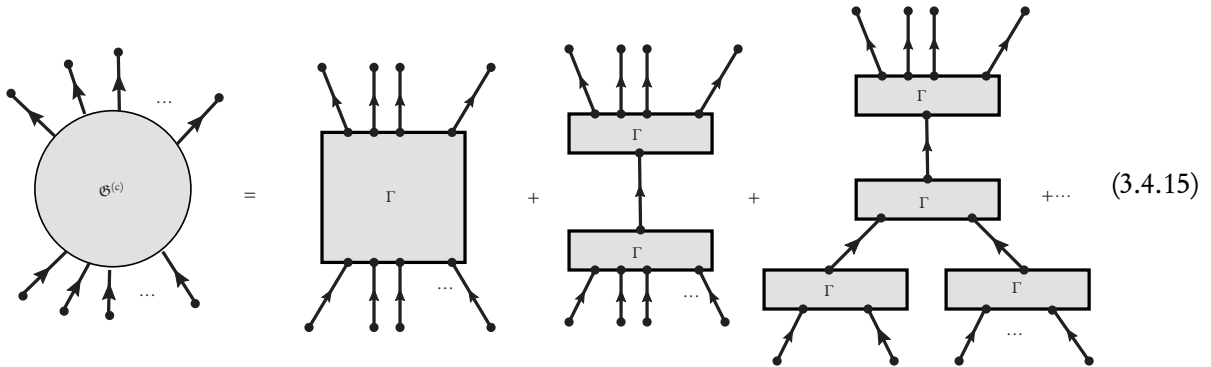
$$\left\{ \mathfrak{G}^{(c)}(x_2 - x_2') \Gamma_{1,1}(x_2' - x_1) \right\}_{2'} = -\delta_{12}. \quad (3.4.13)$$

Für die entsprechenden Impulsraumfunktionen folgt daraus sofort aus dem Faltungssatz

$$\tilde{\Gamma}_{1,1}(k) = -\frac{1}{\tilde{\mathfrak{G}}^{(c)}(k)} = -\frac{1}{\tilde{\mathfrak{D}}(k)} - \tilde{\Pi}(k). \quad (3.4.14)$$

Aus der Dysongleichung folgt dann unmittelbar, daß $\Gamma_{1,1}$ einfach die zusammenhängende Einteilchen-Matsubara-Green-Funktion ist, deren beiden äußeren Beinen amputiert wurden. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen.

Der Induktionsschritt gelingt mit Hilfe der funktionalen Ableitungsregeln. Nehmen wir an, die Behauptung sei korrekt für alle Funktionen $\mathfrak{G}_{J;n,n^*}^{(c)}$, d.h. sie ist durch Diagramme ohne Schleifen (sog. **Baumgraphen**) gegeben mit Vertices, die die Vertexfunktionen $\Gamma_{n^*,n}$ symbolisieren. Angenommen, diese Behauptung sei für ein Indexpaar (n, n^*) richtig. Dann besitzt $\mathfrak{G}_{J;n,n^*}^{(c)}$ die folgende diagrammatische Struktur:



Der Induktionsschritt bzgl. n bzw. n^* erfolgt dann durch Bilden einer weiteren Ableitung nach J bzw. J^* . Wie man schnell unter Verwendung der Kettenregel nachrechnet, liefert die Ableitung der exakten Propagatoren, symbolisiert durch dicke Linien, eine Dreipunktfunktion, von deren Argumenten zwei dem alten und dem neuen äußeren Punkt entsprechen und deren dritter Punkt mit der Vertexfunktion verbunden ist. Man rechnet mit Hilfe der entsprechenden Funktionalableitungen auch schnell nach, daß alle Dreipunkt-Green-Funktionen durch die entsprechenden um die äußeren Beinen ergänzten Dreipunktvertexfunktionen gegeben sind. Die Ableitung einer Propagatorlinie liefert also wieder ein Baumdiagramm mit exakten Vertizes und exakten Propagatoren als Linien. Die Ableitung einer Vertexfunktion nach einem Strom J bzw. J^* liefert, wieder aufgrund der Kettenregel, Diagramme mit jeweils einem Punkt mehr, die über eine Propagatorlinie mit dem neuen äußeren Punkt verbunden sind, also wiederum ein Baumdiagramm der behaupteten Art. Damit ist aber der Beweis erbracht, daß das Funktional Γ alle amputierten einteilchenirreduziblen zusammenhängenden Diagramme, die definitionsgemäß gerade den exakten Vertexfunktionen entsprechen, erzeugt.

3.5 Bose-Einstein-Kondensation als spontane Symmetriebrechung

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie die Bose-Einstein-Kondensation für wechselwirkende Systeme zu berücksichtigen ist. Bisher hatten wir ja vorausgesetzt, daß $|\mu| < m$ ist.

Eine andere wichtige Fragestellung, die wir hierbei gleich mitbearbeiten können, ist die Behandlung **spontan gebrochener globaler Eichsymmetrien**. Eine solche Symmetriebrechung ergibt sich für das hier betrachtete lineare σ -Modell mit der $U(1)$ als Symmetriegruppe, wenn wir dem Massenterm in der Lagrangedichte ein „falsches Vorzeichen“ geben, d.h. wir setzen $m^2 < 0$. Es ist dann klar, daß die bisher durchgeführte Störungstheorie schon im Vakuumfall nicht mehr anwendbar ist, da dann der freie Propagator der Bewegung eines **Tachyons** entspricht und die Berechnung von Loopdiagrammen zu Instabilitäten führt. Außerdem zeigt sich auch, daß die Theorie dann nicht mehr dem Einsteinschen Kausalitätsprinzip genügt, indem sich Störungen überlichtschnell ausbreiten. Durch den Wechselwirkungsterm ergibt sich aber eine stabile Lösung der Feldgleichungen für ein Feld $\varphi(x) = \varphi_0 = \text{const}$, $\varphi^*(x) = \varphi_0^* = \text{const}$, und die Entwicklung der Wirkung um diesen Punkt ermöglicht eine Störungstheorie der üblichen Art. Wie wir unten sehen werden, ergibt sich dabei aber eine Sorte Teilchen mit verschwindender Masse (die **Nambu-Goldstone-Mode**) und eine andere mit endlicher Masse. Weiter weist freilich die Lagrangedichte (und damit auch die Wirkung) immer noch die globale $U(1)$ -Symmetrie auf, die Lösung der Bewegungsgleichungen mit konstanten Feldern jedoch nicht. In solch einem Fall spricht man von **spontaner Symmetriebrechung**, d.h. es bleiben die Folgerungen aus der Symmetrie, also insbesondere die Erhaltung der dazugehörigen Noetherladung gültig, aber die Lösungen selbst weisen diese Symmetrie nicht mehr auf.

Dieses Phänomen der spontanen Symmetriebrechung erweist sich auf vielerlei Gebieten der Physik als äußerst wichtig. Z.B. weist die QCD, die nicht-Abelsche Eichtheorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen im Rahmen des Standardmodells der Elementarteilchen, im Sektor der leichten Quarks (u , d , s) eine (näherungsweise realisierte) **globale chirale Symmetrie** mit der Symmetriegruppe $SU(2)$ (bzw. $SU(3)$) auf. Diese Symmetrie spiegelt sich aber nicht im Massenspektrum der Hadronen wieder. Die Differenzen zwischen den Massen von Hadronen, die „chirale Partner“ (z.B. das ρ -Meson, ein isovektorielles Vektorboson und das a_1 -Meson, ein isoaxialvektorielles Vektorboson) wird in effektiven hadronischen Theorien durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie erklärt. Entsprechend dem Nambu-Goldstone-Theorem gibt es auch (fast) masselose Bosonen, die Pionen (und Kaonen). Deren endliche Masse wird durch die schwache Brechung der chiralen Symmetrie durch die nichtverschwindenden Stromquarkmassen $m_{u,d} \simeq 10 \text{ MeV}$ hervorgerufen, weshalb man

auch von **Pseudo-Goldstone-Bosonen** spricht.

Ein Beispiel aus der Physik der kondensierten Materie ist der Ferromagnetismus, wo eine endliche Magnetisierung des Magneten eine Richtung im Raum auszeichnet und somit die Rotationsinvarianz spontan bricht. Die entsprechenden Goldstone-Moden sind Spinwellen.

3.5.1 Freie Teilchen

Für freie Teilche haben wir das Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation bereits in Abschnitt 2.4 untersucht. Wir betrachten dasselbe Problem nun mit Hilfe der **effektiven Wirkung**. Für freie Teilchen konnten wir das erzeugende Funktional (3.1.68) für Matsubara-Green-Funktionen exakt berechnen. Gemäß (3.4.3) ist demnach das erzeugende Funktional für zusammenhängende Matsubara-Green-Funktionen

$$W[J, J^*] = \{J_1 \mathcal{D}_{12} J_2^*\}_2. \quad (3.5.1)$$

Daraus folgt für die mittleren Felder unter Einwirkung der äußeren Quellen

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\delta W[J, J^*]}{J(x)} = \int_0^\beta d\tau_2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}_2 \mathcal{D}(x - x_2) J^*(x_2), \\ \varphi^*(x) &= \frac{\delta W[J, J^*]}{J^*(x)} = \int_0^\beta d\tau_2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}_2 J(x_2) \mathcal{D}(x_2 - x). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Mit (3.4.5) folgt zunächst

$$\Gamma = - \{J_1 \mathcal{D}_{12} J_2^*\}_2 = - \{\varphi_2^* J_2^*\}_2. \quad (3.5.3)$$

Nun müssen wir noch J_2^* aus dieser Gleichung eliminieren, indem wir die erste Gleichung (3.5.2) lösen. Wegen (3.1.61) und (3.1.58) folgt

$$-[(\partial_\tau - \mu)^2 + \Delta - m^2] \varphi(x) = J^*(x). \quad (3.5.4)$$

Dies liefert die effektive Wirkung⁸

$$\Gamma[\varphi, \varphi^*] = \{\varphi_2^* [(\partial_{\tau_2} - \mu)^2 + \Delta_2 - m^2] \varphi_2\}_2. \quad (3.5.6)$$

Da wir das ideale Gas bei $J = J^* = 0$ betrachten wollen, benötigen wir die Lösung der Bewegungsgleichungen (3.4.7). Es ist klar, daß für ein ideales Gas ohne äußere Quellen wegen der Translationsinvarianz in Raum und (imaginärer) Zeit Lösungen der Form $\varphi = \zeta = \text{const}$ gesucht sind. Dabei bleibt die Phase der Wellenfunktion unbestimmt, und wir können $\varphi = \varphi^* = \zeta / \sqrt{2} \geq 0$ setzen. Variation von (3.5.6) nach φ^* liefert

$$[(\partial_\tau - \mu)^2 + \Delta - m^2] \zeta = (\mu^2 - m^2) \zeta = 0. \quad (3.5.7)$$

⁸Hier wird auch klar, warum die betreffende Größe **effektive Wirkung** heißt, denn (3.5.4) ist genau die Wirkung für imaginäre Zeitargumente, die sich als Wirkungsfunktional gemäß

$$\Gamma = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} [\Pi(x) \phi(x) + \Pi^*(x) \phi(x) - \mathcal{H}] \quad (3.5.5)$$

mit großkanonischen Hamiltonoperator freier Teilchen ergibt, wobei man annimmt, daß die Felder periodisch in τ mit periode β sind. Die nichttriviale Abhängigkeit vom chemischen Potential rührt dabei daher, daß für bosonische Felder der Nötherstrom in der Hamiltonschen Formulierung von den kanonischen Feldimpulsen abhängt, da er in der Lagrangeschen Formulierung die Zeitableitung der Felder enthält. Dieser Zusammenhang zur klassischen Wirkung wird im Pfadintegralformalismus der Feldtheorie noch wesentlich einfacher verständlich [KG06, LeB96].

Es ist also notwendig entweder $|\mu| \neq m$ und $\zeta = 0$ oder $|\mu| = m$ und $\zeta > 0$. Es ist klar, daß ein von τ und \vec{x} unabhängiges mittleres Feld der Besetzung des Einteilchengrundzustandes zu $\vec{k} = 0$ mit einer makroskopischen Teilchenzahl entspricht. Es ist weiter klar, daß für $|\mu| = m$ dieses Feld auch zeitunabhängig ist, denn es ist $E(\vec{k} = 0) = m$ und folglich $E(\vec{k} = 0) - |\mu| = 0$. Je nach Vorzeichen von μ haben wir also ein Kondensat von Teilchen bzw. Antiteilchen im Einteilchengrundzustand.

Das großkanonische Potential ist

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu, \zeta) &= -T \ln Z = -T [\ln Z_0 + \Gamma(\zeta, \zeta)] \\ &= -\frac{TV}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left\{ \ln \left[1 + \exp \left[-\beta \left(E(\vec{k}) - \mu \right) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[1 + \exp \left[-\beta \left(E(\vec{k}) + \mu \right) \right] \right] \right\} + \frac{V}{2} (m^2 - \mu^2) \zeta^2. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Bei gegebener Temperatur und festem Volumen ist

$$Q = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = V \mu \zeta^2 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left\{ f_B[E(\vec{k}) - \mu, \beta] - f_B[E(\vec{k}) + \mu, \beta] \right\}. \quad (3.5.9)$$

Nun können wir wie in Abschnitt 2.5 argumentieren: Damit (3.5.8) und (3.5.9) wohldefiniert sind, muß $|\mu| \leq m$ sein. Falls $|\mu| \leq m$ so gewählt werden kann, daß der Integralausdruck (3.5.9) die vorgegebene Ladung Q ergibt, ist $\zeta = 0$ zu setzen. Falls dies nicht möglich ist, muß notwendig $\zeta > 0$ und $\mu = \pm m$ gesetzt werden. Wir gelangen also zu demselben Resultat wie in Abschnitt 2.5.

Daß $|\mu| \leq m$ sein muß, folgt übrigens auch aus einem rein thermodynamischen Argument aus (3.5.8): Das konstante mittlere Feld ζ ist so zu bestimmen, daß Ω minimal wird. Dies ist nur möglich für $|\mu| \leq m$, weil andernfalls Ω bzgl. ζ bei $\zeta = 0$ ein Maximum statt eines Minimums besitzt. Für $|\mu| = m$ wird Ω unabhängig von ζ , und wir können ζ beliebig wählen, so daß (3.5.9) für jede vorgegebene Gesamtladung Q erfüllt werden kann.

Die Bose-Einsteinkondensation ergibt sich hier als ein typisches Phänomen **spontaner Symmetriebrechung**. Der Hamiltonoperator weist nämlich als Symmetrie die globale Eichinvarianz auf, die durch dessen Unabhängigkeit bei Umdefinition der Phase der Wellenfunktion ϕ gegeben ist. Diese Phaseninvarianz wird für $\zeta > 0$ gebrochen, d.h. der Grundzustand weist die Symmetrie nicht mehr auf. Wir sehen auch, daß je nach Vorzeichen von μ entweder die Teilchen oder Antiteilchen entsprechenden Nullmoden masselos werden, denn es ist ja $\mu^2 = m^2$. Der inverse Propagator für reelle Zeiten ist ja in diesem Fall

$$D^{-1}(\omega, k) = (\omega - \mu)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0. \quad (3.5.10)$$

Das Spektrum der Feldmoden für die Einteilchenanregungen ist also

$$\omega = \mu \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (3.5.11)$$

Für $\mu = \mp m$ verschwindet die Masse der Teilchen- (positive Wurzel) bzw. der Antiteilchenanregungen (negative Wurzel). Dies ist Ausdruck des **Nambu-Goldstone-Theorems**, wonach für jede spontan gebrochene globale kontinuierliche Symmetrie eine masselose bosonische Anregung auftritt.

3.5.2 Wechselwirkende Teilchen

NB: Die Behandlung der Bose-Einstein-Kondensation wird voraussichtlich auf das Kapitel zum Pfadintegral verschoben.

3.6 Das Goldstone-Theorem

TBD.

Kapitel 4

Abelsche Eichtheorien: QED

4.1 Klassische Elektrodynamik als Eichtheorie

Wir betrachten nun die Elektrodynamik von Dirac-Teilchen. Dabei haben wir die QED im engeren Sinne vor Augen, die die elektromagnetische Wechselwirkung von Elektronen, Positronen und Photonen zum Gegenstand hat. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns zunächst mit der Beschreibung der entsprechenden **klassischen Feldtheorie**.

Wir gehen von der Lagrangedichte freier Dirac-Teilchen

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\psi \quad (4.1.1)$$

aus (vgl. Abschnitt 2.6). Dort haben wir gesehen, daß der Strom (2.6.47)

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4.1.2)$$

aufgrund der Dirac-Gleichung

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{D}} + m) = 0 \quad (4.1.3)$$

der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.1.4)$$

genügt und folglich die dazugehörige Ladung

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi \quad (4.1.5)$$

erhalten ist.

Aus der klassischen Elektrodynamik wissen wir, daß die elektromagnetische Stromdichte der Kontinuitätsgleichung (4.1.4) genügen muß, damit bei Anwesenheit von Ladungen und Strömen die Eichinvarianz gewährleistet ist. Hier leiten wir nun die entsprechenden Feldgleichungen für die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und dem Spinorfeld aus der Forderung nach **lokaler Eichinvarianz** her. Die Lagrangedichte (4.1.1) freier Dirac-Teilchen ist unter der **globalen Eichtransformation**

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(i\alpha)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \exp(-i\alpha)\bar{\psi}(x) \quad (4.1.6)$$

invariant, und (4.1.2) ist der dazugehörige Noetherstrom.

Diese Invarianz unter der Transformationsgruppe $U(1)$ geht nun zunächst verloren, wenn wir statt des konstanten Transformationsparameters α eine von den Raum-Zeit-Koordinaten x abhängige Transformation

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[iq\chi(x)]\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \exp[-iq\chi(x)]\bar{\psi}(x) \quad (4.1.7)$$

betrachten, denn dann ergibt sich die Ableitung

$$\partial_\mu \psi'(x) = \exp[iq\chi(x)] [\partial_\mu \psi(x) + iq\partial_\mu \chi(x) \cdot \psi(x)]. \quad (4.1.8)$$

Wir können aber die Ableitung wie folgt zu einer **kovarianten Ableitung** verallgemeinern:

$$D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + iqA_\mu(x)]\psi(x). \quad (4.1.9)$$

Wir erlauben nun, daß sich zugleich mit (4.1.8) auch das **Eichfeld** A_μ transformiert. Dann können wir verlangen, daß

$$D'_\mu \psi'(x) = [\partial_\mu + iqA'_\mu(x)] \{ \exp[iq\alpha(x)]\psi(x) \} \stackrel{!}{=} \exp[iq\alpha(x)] D_\mu \psi(x) \quad (4.1.10)$$

ist. Führt man die Ableitung aus, ergibt sich für das transformierte Eichfeld

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x), \quad (4.1.11)$$

also in der Tat die von der klassischen Elektrodynamik bekannte **Eichtransformation** des Viererpotentials des elektromagnetischen Feldes.

Damit ist aber der Ausdruck

$$\mathcal{L}_{e,\text{eich}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (4.1.12)$$

wie gewünscht invariant unter der **lokalen Eichtransformation**

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \exp[iq\chi(x)]\psi(x), & \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \exp[-iq\chi(x)]\bar{\psi}(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Damit das Eichfeld dynamische Photonen beschreibt, müssen wir noch den eichinvarianten Term für freie masselose Vektorfelder zur Lagrangedichte (4.1.12) hinzuaddieren. Damit haben wir die **Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik**

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - qA_\mu j^\mu \quad \text{mit} \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.1.14)$$

aus dem Prinzip der Eichinvarianz hergeleitet. Da die zugrundegelegte Symmetriegruppe $U(1)$ abelsch ist, bezeichnet man die QED als **abelsche Eichtheorie**. Damit ψ **Elektronen als Teilchen und Positronen als Antiteilchen** beschreibt, muß $q = -e = -\sqrt{4\pi\alpha}$ gesetzt werden. Dabei ist $\alpha \simeq 1/137$ die **Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante**.

Um eine eindeutige Lösung der Feldgleichungen zu erhalten, müssen wir wie schon im Fall freier Felder (vgl. Abschnitt 2.9) die **Eichung fixieren**. Hierzu wählen wir die **Coulomb-Eichbedingung**

$$\text{div} \vec{A} = 0, \quad (4.1.15)$$

die zwar nicht manifest Lorentz-kovariant ist, dafür aber eine vollständige Eichfixierung gewährleistet, wie wir gleich sehen werden. Für das elektromagnetische Feld ergeben sich dann wie für freie Felder

die **beiden dreidimensional transversalen Feldfreiheitsgrade** als die dynamischen Feldfreiheitsgrade, und folglich enthält die mittels der Modenentwicklung nach ebenen Wellen im Wechselwirkungsbild quantisierte Theorie keine unphysikalischen Freiheitsgrade mehr, denn es treten nur Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für die dreidimensional transversalen Feldfreiheitsgrade auf.

Das Feld A^0 , welches schon deshalb kein unabhängiger dynamischer Freiheitsgrad sein kann, weil wie im Falle freier Felder der dazugehörige kanonische Feldimpuls identisch verschwindet, läßt sich aufgrund der Feldgleichungen als Funktional des elektromagnetischen Stromes qj^μ eliminieren. Es ergibt sich als **instantanes Coulombpotential** aus der Ladungsdichteverteilung der Elektronen und Positronen. Dies scheint der **Einstein-Kausalität** zu widersprechen, denn in einer relativistischen Feldtheorie kann es keine sich instantan ausbreitenden Wirkungen geben. Wie wir aber unten zeigen werden, stellt die Eichinvarianz der Theorie sicher, daß in der Tat beobachtbare Größen stets retardiert auf äußere Störungen reagieren, wobei die Wirkungsausbreitung stets unterhalb der Lichtgeschwindigkeit bleibt. Ein Vorteil der Coulomb-Eichung für die Vielteilchenphysik (insbesondere in nichtrelativistischen Anwendungen auf Atome und Moleküle mit vielen Elektronen oder in der Theorie des kondensierten Zustandes) ist andererseits die Möglichkeit, zunächst das (über die naive Störungstheorie hinausgehende!) Problem des gebundenen Zustandes mittels des Coulomb-Anteils des Hamiltonoperators näherungsweise zu lösen und dann das dynamische Photonenfeld störungstheoretisch zu berücksichtigen. Dies führt dann einerseits zu Korrekturen der gebundenen Zustände (z.B. die **Lamb-Shift**, die zur Aufhebung der Entartung bestimmter Energieniveaus in Atomen führen und die zur Entwicklung der modernen Renormierungstheorie für die QED Ende der 1940er Jahre durch **Feynman, Schwinger, Tomonaga und Dyson** geführt hat), andererseits aber auch zu Größen wie der Intensitätsverteilung von Spektrallinien aus Strahlungsübergängen des Atoms. Wie wir unten sehen werden, ergibt sich für die Vielteilchenphysik die Möglichkeit, **Materialgrößen** wie die **Dielektrizitätsfunktion** oder die **elektrische Leitfähigkeit** des entsprechenden Materials (in unserem Fall eines relativistischen Elektron-Positron-Photon-Plasmas) zu berechnen.

Um die Theorie zu quantisieren, leiten wir die Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld her, indem wir die Wirkung

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \mathcal{L}(x) \quad (4.1.16)$$

funktional nach A^μ differenzieren:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - qj^\nu \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.1.17)$$

In zeitliche und räumliche Komponenten aufgespalten folgt unter Verwendung der Eichbedingung (4.1.5)

$$\Delta A^0 = -qj^0, \quad (4.1.18)$$

$$\square \vec{A} = q\vec{j} - \vec{\nabla} A^0. \quad (4.1.19)$$

In der Tat ergibt sich daraus sofort als Lösung für A^0

$$A^0(x) = \frac{q}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \text{mit} \quad \rho = j^0. \quad (4.1.20)$$

Die Verträglichkeit der Gleichung (4.1.19) mit der Eichbedingung (4.1.15) folgt aus der Kontinuitätsgleichung, denn es ist

$$\text{div} \square \vec{A} = q \text{div} \vec{j} - q \Delta A^0 \stackrel{(4.1.18)}{=} q \text{div} \vec{j} + q \partial_t j^0 = q \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.1.21)$$

Hier zeigt sich der bereits oben erwähnte wichtige Zusammenhang zwischen lokaler Eichinvarianz und Stromerhaltung: Die Stromerhaltung ist eine notwendige Bedingung für die Konsistenz der **eichfixierten Bewegungsgleichungen** mit der Eichbedingung (4.1.5), und die Möglichkeit, diese Nebenbedingung zu fordern ist ihrerseits allein durch die Eichinvarianz der Theorie gerechtfertigt.

Schließlich lautet nach der Eichfixierung mittels der Coulombeichbedingung (4.1.15) die Wirkung

$$S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \Delta \vec{A} + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi - \frac{q}{2} A_0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi + q \vec{A} \cdot \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi \right]. \quad (4.1.22)$$

Dabei ist für A_0 die Lösung (4.1.20) einzusetzen. Außerdem ist stets die Eichbedingung (4.1.15) zu berücksichtigen, von der wir eben gezeigt haben, daß sie konsistent mit den Bewegungsgleichungen ist. Wir können nunmehr die Spinorelektrodynamik **kanonisch quantisieren** und Störungstheorie betreiben analog wie im vorigen Kapitel anhand des wechselwirkenden geladenen skalaren Feldes beschrieben. Diese Wirkung werden wir als Ausgangspunkt für die Quantisierung der Theorie im nächsten Abschnitt nehmen.

Betrachten wir noch die physikalische Bedeutung unserer klassischen Theorie. Da der Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -q A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.1.23)$$

keine Ableitungen enthält, behält auch im wechselwirkenden Falle der Strom dieselbe Form wie für freie Dirac-Felder:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (4.1.24)$$

Der elektromagnetische Strom ist durch

$$j_{\text{em}}^\mu = q j^\mu \quad (4.1.25)$$

gegeben. Dies wird insbesondere klar, wenn wir die Feldgleichungen (4.1.17) mit Hilfe der Komponenten des **Faraday-tensors**

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.1.26)$$

ausdrücken. Dazu bilden wir die „zeit-räumlichen“ und „raum-räumlichen“ Komponenten

$$\begin{aligned} F_{0j} &= \dot{A}_j - \partial_j A_0 = -\dot{A}^j - \partial_j A^0 = E^j, \\ F_{jk} &= \partial_j A_k - \partial_k A_j = -\partial_j A^k + \partial_k A^j = \epsilon^{kj l} (\text{rot } \vec{A})^l = -\epsilon^{jkl} B^l. \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Dies in die Feldgleichungen eingesetzt ergibt die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen**

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}_{\text{em}}, \quad \text{div } \vec{E} = \varrho_{\text{em}} = j_{\text{em}}^0. \quad (4.1.28)$$

Die **homogenen Maxwell-Gleichungen** sind die Integrabilitätsbedingung für ihre Herleitbarkeit aus den elektromagnetischen Potentialen $\Phi = A^0$ und \vec{A} :

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \Phi, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (4.1.29)$$

Die Formulierung durch die vier **Maxwell-Gleichungen** (4.1.28) und (4.1.29) für die **eichinvarianten beobachtbaren Felder** \vec{E} und \vec{B} zeigt nochmals explizit die **Eichinvarianz** der Theorie¹.

¹Wir betonen, daß es sich hierbei um die **mikroskopischen Maxwellgleichungen** handelt, d.h. \vec{E} und \vec{B} sowie ϱ_{em}

4.2 Spinor-QED in Coulombbeichung

Wir quantisieren die QED gleich im Wechselwirkungsbild. Die Rechnungen für die freien Feldoperatoren haben wir bereits in den Abschnitten 2.9 und 2.9 durchgeführt. Wir fassen die entsprechenden Resultate aber hier nochmals übersichtlich zusammen und leiten die im folgenden benötigten **Matsubara-Feynman-Regeln**, also die **freien Matsubara-Green-Funktionen für Photonen und Dirac-Teilchen** und die **störungstheoretischen elementaren Wechselwirkungsverices** her.

Der freie Lagrangedichteoperator ist durch den Anteil der vollständigen Lagrangedichte (4.1.14) gegeben, welcher bilinear in den Feldern ist²:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{A}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{A}} + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi. \quad (4.2.1)$$

Die kanonischen Feldimpulsoperatoren sind demnach

$$\vec{\Pi}_\gamma = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\vec{\mathbf{A}}}} = \dot{\vec{\mathbf{A}}}, \quad \Pi_e = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}} = i \bar{\psi} \gamma^0 \quad (4.2.2)$$

und die freie Hamiltondichte

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \vec{\Pi}_\gamma^2 - \frac{1}{2} \vec{\mathbf{A}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{A}} - \Pi_e \gamma^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\gamma} + im) \psi. \quad (4.2.3)$$

Hierbei verzichten wir auf die Normalordnung, obwohl dies in der spinoriellen QED eigentlich kein Problem darstellt, denn wie wir unten sehen werden, treten keine Photon-Tadpole-Schleifen auf.

Die erhaltene Ladung ist durch

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \bar{\psi} \gamma^0 \psi = -i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \Pi_e \psi \quad (4.2.4)$$

gegeben. Der großkanonische freie Hamiltonoperator lautet also

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} [\mathcal{H}_0 + i \mu \Pi_e \psi]. \quad (4.2.5)$$

Die kanonischen Antikommutatorregeln für das Diracfeld und die Kommutatorregeln für das Photonfeld in Coulombbeichung können wir direkt (2.7.1) bzw. 2.9.29 entnehmen:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} &= 0, & \{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} &= i \{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b^\dagger(t, \vec{y})\} = i \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\mathbf{A}_j(t, \vec{x}), \mathbf{A}_k(t, \vec{y})] &= 0, \\ [\mathbf{A}_j(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}_k(t, \vec{y})] &= i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{K^2} \right) \exp[-i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})] =: i \hat{P}_{jk} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

und \vec{j}_{em} umfassen das vollständige elektromagnetische Feld bzw. die vollständige mikroskopisch Ladungs- und Stromverteilung. Den Zusammenhang zu den makroskopischen Maxwellgleichungen, die Gleichungen für das elektromagnetische Feld, die elektrische Polarisation und Magnetisierung der Materie (bzw. die äußeren Felder \vec{D} und \vec{H}) und die Verteilungen für die freien Ladungen und Ströme sind, werden wir weiter unten im Rahmen der **Linearen Antworttheorie** ausführlich mikroskopisch begründen. Dies stellt ein wichtiges Beispiel für das eigentliche Paradigma der Vielteilchentheorie, das (approximative) **makroskopische Verhalten der Materie und Felder** aus den grundlegenden mikroskopischen Gleichungen herzuleiten, dar.

²Wir lassen der Einfachheit halber den Index I für das Wechselwirkungsbild weg. Falls wir im folgenden Heisenberg-Bildoperatoren benötigen, fügen wir stattdessen für diese Operatoren den Index H an.

Dabei sind wir gleichzeitig zum Limes eines sehr großen Volumens übergegangen. Die Modenentwicklungen der Felder lauten dann gemäß (2.7.3) und (2.9.24)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \sum_{\sigma} \left[\mathbf{c}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^{\sigma}(x) + \mathbf{d}^{\dagger}(\vec{k}, \sigma) v(\vec{k}, \sigma) u_{\vec{k},+}^{*\sigma}(x) \right], \\ \bar{A}(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \sum_{\lambda} \tilde{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left[\mathbf{a}(\vec{k}, \lambda) u_{\vec{k},+}^{\lambda}(x) + \mathbf{a}^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) u_{\vec{k},+}^{*\lambda}(x) \right].\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Dabei haben wir für die Elektronen- bzw. Positronenvernichtungsoperatoren $\mathbf{c}(\vec{k}, \sigma)$ und $\mathbf{d}(\vec{k}, \sigma)$ geschrieben.

Zur Herleitung des Elektron-Positron-Matsubara-Propagators wollen wir nun die Modenentwicklung für die nach dem **großkanonischen freien Operator** zeitentwickelten Operatoren berechnen. Wie beim geladenen Klein-Gordon-Feld können wir die Beziehung zum Feld (4.2.7) aus den Kommutatorregeln berechnen. Das Resultat ist

$$\psi^{(\mu)}(x) = \exp(i\mu t)\psi(x), \quad \overline{\psi^{(\mu)}}(x) = \exp(-i\mu t)\overline{\psi}(x). \quad (4.2.8)$$

Setzen wir dies in (4.2.7) ein, erhalten wir für $t = -i\tau$

$$\begin{aligned}\psi^{(\mu)}(\tau, \vec{x}) &= \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left[\mathbf{c}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) \exp[-(E - \mu)\tau + i\vec{k} \cdot \vec{x}] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{d}^{\dagger}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) \exp[(E + \mu)\tau - i\vec{k} \cdot \vec{x}] \right], \\ \overline{\psi^{(\mu)}}(\tau, \vec{x}) &= \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{k} \left[\mathbf{c}^{\dagger}(\vec{k}, \sigma) \bar{u}(\vec{k}, \sigma) \exp[(E - \mu)\tau - i\vec{k} \cdot \vec{x}] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{d}(\vec{k}, \sigma) u(\vec{k}, \sigma) \exp[-(E + \mu)\tau + i\vec{k} \cdot \vec{x}] \right].\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

Die freie Matsubara-Green-Funktion ist durch

$$\mathfrak{G}_{ab}^{(0)}(x) = \left\langle \mathcal{T}_{\tau} \psi_a^{(\mu)}(x) \overline{\psi}_b^{(\mu)}(0) \right\rangle_0 := \Theta(\tau) \left\langle \psi_a^{(\mu)}(x) \overline{\psi}_b^{(\mu)}(0) \right\rangle_0 - \Theta(-\tau) \left\langle \overline{\psi}_b^{(\mu)}(0) \psi_a^{(\mu)}(x) \right\rangle_0 \quad (4.2.10)$$

definiert, wobei wir beim Zeitordnungsoperator ein zusätzliches Vorzeichen berücksichtigt haben, das sich bei Umordnung fermionischer Feldoperatoren aufgrund der Zeitordnungsvorschrift aus der ursprünglichen Ordnung ergibt. Wie bei den Bosonen können wir die **Kubo-Martin-Schwinger-Bedingung** herleiten, wobei allerdings die Vorzeichenregel zu berücksichtigen ist. Für $-\beta < \tau < 0$ erhalten wir dann

$$\mathfrak{G}_{ab}^{(0)}(\tau, \vec{x}) = -\mathfrak{G}_{ab}^{(0)}(\tau + \beta, \vec{x}). \quad (4.2.11)$$

Dies bedeutet, daß in der **Fourier-Darstellung**

$$\mathfrak{G}_{ab}^{(0)}(\tau, \vec{x}) = \sum_k \tilde{\mathfrak{G}}_{ab}^{(0)}(i\bar{\omega}_n, \vec{k}) \exp(-i\bar{\omega}_n \tau + i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (4.2.12)$$

die **fermionischen Matsubara-Frequenzen**

$$\bar{\omega}_n = (2n + 1)\pi T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.2.13)$$

aufzutreten.

Zur konkreten Berechnung des Propagators benötigen wir noch die Kontraktionsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Die Herleitung erfolgt wie im vorigen Kapitel bei den geladenen Bosonen (*Übung!*). Es ergibt sich

$$\langle \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}, \sigma) \mathbf{c}(\vec{k}', \sigma') \rangle_0 = (2\pi)^3 2E_c(\vec{k}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') f_{\mathbb{F}}[E_c(\vec{k}) - \mu], \quad (4.2.14)$$

$$\langle \mathbf{d}^\dagger(\vec{k}, \sigma) \mathbf{d}(\vec{k}', \sigma') \rangle_0 = (2\pi)^3 2E_c(\vec{k}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') f_{\mathbb{F}}[E_c(\vec{k}) + \mu], \quad (4.2.15)$$

$$\langle \mathbf{c}(\vec{k}, \sigma) \mathbf{c}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \rangle_0 = (2\pi)^3 2E_c(\vec{k}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \{1 - f_{\mathbb{F}}[E_c(\vec{k}) - \mu]\}, \quad (4.2.16)$$

$$\langle \mathbf{d}(\vec{k}, \sigma) \mathbf{d}^\dagger(\vec{k}', \sigma') \rangle_0 = (2\pi)^3 2E_c(\vec{k}) \delta_{\sigma\sigma'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \{1 - f_{\mathbb{F}}[E_c(\vec{k}) + \mu]\}. \quad (4.2.17)$$

Durch eine etwas längere Rechnung ergibt sich dann für die Matsubara-Green-Funktion

$$\tilde{\mathfrak{G}}^{(0)}(i\bar{\omega}_n, \vec{k}) = - \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \Big|_{k^0 = i\bar{\omega}_n + \mu} = \frac{\gamma^0(i\bar{\omega}_n + \mu) - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m}{m^2 + \vec{k}^2 - (i\bar{\omega}_n + \mu)^2}. \quad (4.2.18)$$

Bei der Rechnung benötigt man außer den Schritten, die wir auch schon bei der Berechnung des bosonischen Propagators verwendet haben, die **Spinsummen** der Dirac-Spinoren für die ebenen Wellen freier Dirac-Teilchen

$$\sum_{\sigma} u(\vec{k}, \sigma) \bar{u}(\vec{k}, \sigma) = \not{k} + m, \quad \sum_{\sigma} v(\vec{k}, \sigma) \bar{v}(\vec{k}, \sigma) = \not{k} - m, \quad (4.2.19)$$

die man am einfachsten durch direkte Rechnung aus der expliziten Darstellung (2.7.6-2.7.7) herleitet. Auch den Propagator des **Photonenfeldes** in Coulombbeichung können wir auf dieselbe Weise aus der Modenentwicklung für die Imaginärzeitentwicklung

$$\vec{\mathbf{A}}(\tau, \vec{x}) = \sum_{\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{d^3\vec{k}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left[\mathbf{a}(\vec{k}, \lambda) \exp(-K\tau + i\vec{k} \cdot \vec{x}) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp(K\tau - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \quad (4.2.20)$$

herleiten. Dabei haben wir beachtet, daß für masselose Felder die Dispersionsrelation $E_{\gamma}(\vec{k}) = |\vec{k}| =: K$ gilt³. Unter Verwendung der Summe der Polarisationsvektoren über die Polarisationszustände

$$\sum_{\lambda} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \otimes \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = \hat{P}_{\perp}(\vec{k}) := \mathbb{1} - \frac{\vec{k} \otimes \vec{k}}{K^2} \quad (4.2.21)$$

ergibt sich der **freie Photonpropagator** zu

$$\hat{\mathfrak{D}}^{(0, \text{trans})}(k) = \frac{\hat{P}_{\perp}(\vec{k})}{\vec{k}^2 - (i\omega_n)^2}, \quad (4.2.22)$$

wobei für Photonen wieder die bosonischen Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n = 2\pi nT \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.2.23)$$

zu verwenden sind.

³Als masseloses Feld kann das Photonfeld kein chemisches Potential besitzen, was allerdings auch schon daraus folgt, daß es für Photonen keine erhaltene Ladungszahl gibt.

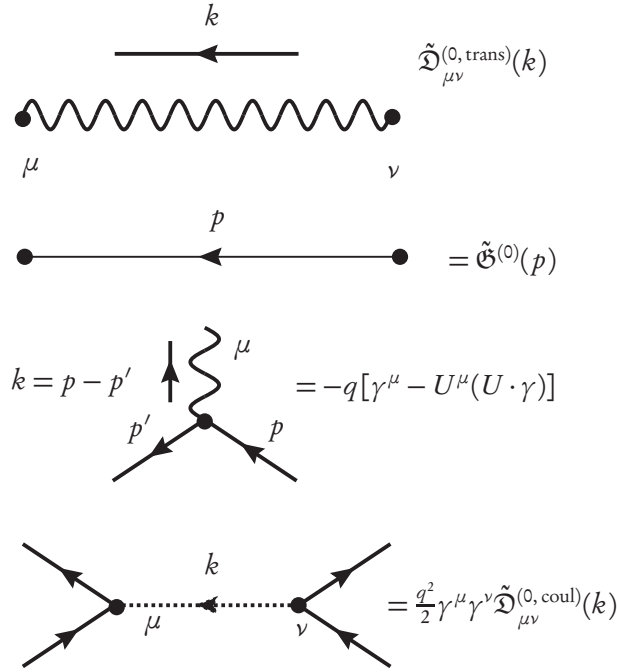


Abbildung 4.1: Die Matsubara-Feynman-Regeln für die QED in der kanonischen Coulombbeichung.

Im folgenden ist es bequemer, im Viererformalismus zu rechnen. Dazu führen wir den **Vierergeschwindigkeitsvektor** $U^\mu = (1, 0, 0, 0)^t$ des (in unserem Koordinatensystem ruhenden) Wärmebades ein. Dann ist der Propagator durch

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{(0,trans)}(i\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{k^2 U_\mu U_\nu - (k \cdot U)(k_\mu U_\nu + k_\nu U_\mu) + k_\mu k_\nu}{(k \cdot U)^2 - k^2} \right] \Big|_{k^0 = i\omega_n}. \quad (4.2.24)$$

Dieser ist offensichtlich transversal sowohl bzgl. k als auch bzgl. U :

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{(0,trans)}(k) k^\mu = \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{(0,trans)}(k) U^\mu = 0. \quad (4.2.25)$$

Der Wechselwirkungsanteil des Hamiltondichteoperators lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}}(x) &= \mathcal{H}_{\text{coul}}(x) - \vec{A}(x) \cdot \vec{j}_{\text{em}}(x) \\ &= \frac{1}{2} q^2 \bar{\Psi}(x) \gamma^0 \Psi(x) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\bar{\Psi}(t, \vec{x}') \gamma^0 \Psi(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} - q \vec{A} \cdot \bar{\Psi}(x) \vec{\gamma} \Psi(x). \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Wie wir gleich noch sehen werden, ist es für das folgende bequem, den Coulombterm in der folgenden Form zu schreiben

$$\mathcal{H}_{\text{coul}} = -\frac{q^2}{2} \int_0^\beta d\tau' \int_{\mathbb{R}^3} d^4 x' \sum_k \exp[-i\omega \cdot (\tau - \tau') + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{(0,coul)}(k) j^\mu(x') j^\nu(x), \quad (4.2.27)$$

wobei

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^{(0,coul)}(k) = -\frac{U_\mu U_\nu}{(k \cdot U)^2 - k^2}. \quad (4.2.28)$$

4.2 · Spinor-QED in Coulombbeichung

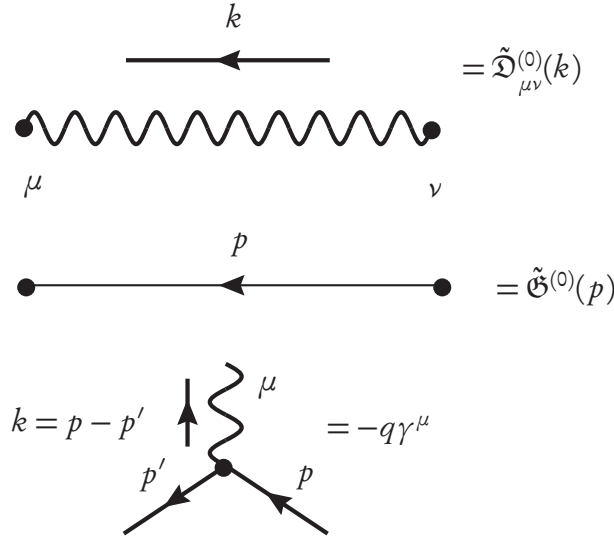


Abbildung 4.2: Die endgültigen Matsubara-Feynman-Regeln für die QED in der Coulombbeichung.

Dabei haben wir ausgenutzt, daß wir im Imaginärzeitformalismus nur den Bereich $\tau \in (-\beta, \beta)$ benötigen und dort die Diracsche δ -Distribution bzgl. τ durch die entsprechende Fourierreihe dargestellt werden kann. Außerdem hängt $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}^{(0, \text{coul})}(k)$ nicht von $k^0 = i\omega_n$ ab.

Damit erhalten wir die in Abb. 4.1 abgebildeten elementaren Diagrammelemente. Allerdings wird daraus sofort klar, daß wir die Feynmanregeln noch erheblich vereinfachen können. Die Coulombwechselwirkung in der Ordnung q^2 taucht in diesen Diagrammregeln als störungstheoretischer Vierfermionenvertex der ersten Ordnung Störungstheorie auf. Andererseits tritt in der Theorie bei endlichen Temperaturen der Vertex 1. Ordnung (der von der Ordnung q^2 ist) immer mit einem Photonpropagator auf, der zwei solcher Vertices verbindet. In dieser Form haben wir auch schon die Coulombwechselwirkung mit Hilfe des statischen Propagators (4.2.28) geschrieben. Es tritt also in Diagrammen der Matsubara-Störungstheorie stets die Summe aus einem Diagrammteil 2. Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ auf, die mit einem Propagator (4.2.24) verbunden sind und einem Coulomb-Wechselwirkungsvertex 1. Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$. Den letzteren können wir aber auch als Wechselwirkungsterm 2. Ordnung auffassen, wobei die beiden Vertices mit einem statischen Propagator (4.2.28) verbunden sind. Den Coulomb-Wechselwirkungsvertex können wir wegen der Projektoreigenschaften des statischen Propagators in der Form

$$\Gamma_{\gamma ee}^{(\text{coul})\mu}(p_1, p_2) = -qU^\mu(\gamma \cdot U) \quad (4.2.29)$$

schreiben. Da der Propagator für transversale Photonen (4.2.24) auch transversal bzgl. U_ν ist, können wir also einfach die Summe der Vertices und die Summe der Propagatoren in den Feynman-Regeln verwenden. Der endgültige Propagator für die QED in Coulombbeichung ist damit

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \tilde{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}^{(0, \text{coul})}(k) + \tilde{\mathfrak{D}}_{\mu\nu}^{(0, \text{coul})}(k) = \frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{(k \cdot U)(k_\mu U_\nu + k_\nu U_\mu) - k_\mu k_\nu}{(k \cdot U)^2 - k^2} \right] \quad (4.2.30)$$

und der endgültige Wechselwirkungsvertex

$$\Gamma_{\gamma ee}^\mu = -q\gamma^\mu. \quad (4.2.31)$$

Wir merken der Vollständigkeit halber an, daß das obige diagrammatische Argument auch für die Vakuumtheorie mit äußeren Photonennlinien gilt. Diese entsprechen nämlich **asymptotisch freien**

Photonmoden, die $\propto \epsilon_\mu(k, \lambda)$ sind, und die Polarisationsvektoren $\epsilon_\mu(k, \lambda)$ sind transversal bzgl. U_μ . Wir stellen die endgültigen Matsubara-Feynmanregeln für die QED in Coulombbeichung nochmals in Abb. 4.2 zusammen.

4.3 Lineare Antworttheorie

Bevor wir konkrete Rechnungen für ein relativistisches QED-Plasma durchführen, wollen wir die **lineare Antworttheorie**⁴ besprechen, die den einfachsten theoretischen Ansatz für eine Beschreibung von **Materialeigenschaften** aus den mikroskopischen Modellen der Vielteilchen-Quantentheorie darstellt. Die Idee ist, die Reaktion des Mediums auf eine äußere Störung, die schwach gegenüber den Wechselwirkungen der Teilchen untereinander ist, anhand entsprechender Observabler zu untersuchen.

4.3.1 Erinnerung an die phänomenologische klassische Elektrodynamik

Bevor wir die recht abstrakte quantenfeldtheoretische Behandlung des Problems, die **Materialkonstanten** der klassischen Elektrodynamik (**Permittivität bzw. Brechungsindex und elektrische Leitfähigkeit**) aus quantenfeldtheoretischen Modellen herzuleiten, angehen, besprechen wir kurz die entsprechende Fragestellung im Rahmen der klassischen Elektrodynamik und rekapitulieren kurz die physikalische Bedeutung der **Konstitutivgleichungen**, die die **makroskopischen Materialeigenschaften** beschreiben und mit Parametern des mikroskopischen Modells verknüpfen [SDM⁺98, Jac83].

Wir stellen uns ein insgesamt elektrisch neutrales amorphes Medium (z.B. ein Gas oder eine Flüssigkeit) vor. Mikroskopisch gesehen besteht es aus positiv geladenen Atomkernen und negativ geladenen Elektronen, die zu Atomen und/oder Molekülen gebunden sind. Dieses Medium befinde sich im thermodynamischen Gleichgewicht bei einer bestimmten Temperatur, und wir fragen nun, wie sich elektromagnetische Felder im Inneren dieses Materials verhalten. Mikroskopisch gesehen sind im Rahmen der klassischen Theorie dafür die **Maxwellgleichungen** für das elektromagnetische Feld (\vec{e}, \vec{b}) zuständig:

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{e} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0, \quad (4.3.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{e} = \rho, \quad \vec{b} - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{j}. \quad (4.3.2)$$

Die Ladungs- bzw. Stromverteilung sind durch die geladenen Teilchen des Mediums gegeben

$$\rho(t, \vec{x}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}_i(t)], \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = \sum_i q_i \vec{v}_i(t) \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}_i(t)]. \quad (4.3.3)$$

Die Bewegungsgleichung für jedes einzelne Teilchen ist (in nichtrelativistischer Näherung) durch

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = q_i [\vec{e}(t, \vec{x}_i) + \dot{\vec{x}}_i \times \vec{b}(t, \vec{x}_i)] \quad (4.3.4)$$

gegeben. Es ist freilich ausgeschlossen, daß wir dieses komplizierte gekoppelte Gleichungssystem aus den Maxwellgleichungen, den Ladungs- und Stromverteilungen und der Bewegungsgleichung (4.3.1-4.3.4) lösen können, denn für makroskopische Körper haben wir es mit Teilchenzahlen der Größenordnung 10^{27} zu tun!

⁴engl. linear-response theory

Wir gehen daher zu einer statistischen Beschreibung für **mittlere makroskopische Größen** über. Dazu nutzen wir aus, daß in der gewöhnlich auftretenden Situation von im thermischen Gleichgewicht befindlicher Materie ohne die Anwesenheit von äußeren Feldern bei Mittelung über mikroskopisch große Raumzeitbereiche die Ladungs- und Stromverteilung sowie das elektromagnetische Feld im Mittel verschwinden. Die üblicherweise durch von außen auf das Medium einwirkenden elektromagnetischen Felder sind schwach im Vergleich zu den inneratomaren Feldern, und wir können davon ausgehen, daß sie lediglich kleine Verschiebungen der Elektronen von ihrer Gleichgewichtslage, an die sie durch die inneratomaren Kräfte gebunden sind, bewirken. Wir erhalten dann im Inneren des Mediums ein **makroskopisches elektromagnetisches Feld** (\vec{E}, \vec{B}) , welches sich aus der Superposition des von außen eingepprägten elektromagnetischen Feldes und dem mittleren Feld, das sich aus der Verschiebung der Elektronen gegenüber den positiv geladenen Kernen ergibt. Dabei wird über die stark zeitlich und räumlich fluktuierenden mikroskopischen Felder gemittelt. Wir haben dann also

$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle, \quad \vec{B} = \langle \vec{b} \rangle. \quad (4.3.5)$$

Gehen wir davon aus, daß die raum-zeitlichen Skalen, auf denen sich die makroskopischen Felder wesentlich ändern, sehr groß gegenüber den mikroskopischen Raum-Zeitskalen der Fluktuationen sind, so daß wir unter (4.3.5) eine raum-zeitliche Mittelung über makroskopisch kleine aber mikroskopisch große Skalen vornehmen können, gehen die homogenen mikroskopischen Maxwellgleichungen einfach in die entsprechenden Gleichungen für die makroskopischen Felder

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.3.6)$$

über. Bei der makroskopischen Mittelung der inhomogenen Maxwellgleichungen können wir ausnutzen, daß die Atome bzw. Moleküle auf den makroskopisch kleinen aber mikroskopischen großen Raum-Zeitskalen, über die wir mitteln, als punktförmig angenommen werden dürfen. Dann brauchen wir bei der Mittelungsbildung lediglich die führende Ordnung der **Multipolentwicklung** mitzunehmen. Betrachten wir zugleich den nichtrelativistischen Grenzfall für Atome bzw. Moleküle, die kein permanentes magnetisches Dipolmoment besitzen sollen, können wir weiter die Magnetisierung des Mediums aufgrund des von außen eingepprägten elektromagnetischen Feldes vernachlässigen. Dann können wir die Materie in elektromagnetischer Hinsicht durch die **elektrische Polarisierung**

$$\vec{P}(t, \vec{x}) = \langle \rho(t, \vec{x}) \delta \vec{u}(t, \vec{x}) \rangle = q_e N \langle \delta \vec{u}(t, \vec{x}) \rangle \quad (4.3.7)$$

charakterisieren. Dabei ist $\delta \vec{x}$ die mittlere Verschiebung der Elektronen um ihre Gleichgewichtslage ohne äußere Störung und N die homogene und zeitlich konstante Teilchenzahldichte des ungestörten Mediums im thermodynamischen Gleichgewicht. Dabei vernachlässigen wir im Sinne der **linearen Antworttheorie** die Störung dieser Teilchenzahldichte aufgrund des Mediums, denn $\langle \delta \vec{x} \rangle$ ist ja bereits eine Störung erster Ordnung. Für den makroskopischen Strom folgt dann

$$\vec{J}(t, \vec{x}) = \left\langle \rho(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{u}(t, \vec{x}) \right\rangle = q_e N \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{u}(t, \vec{x}) \right\rangle = \dot{\vec{P}}(t, \vec{x}). \quad (4.3.8)$$

Da weiter notwendig die mikroskopischen Ladungs- und Stromverteilungen aufgrund der mikroskopischen Maxwellgleichungen (4.3.1-4.3.2) die **Kontinuitätsgleichung** erfüllen, muß dies auch für die makroskopische Ladungsverteilung der Fall sein, d.h. es muß gelten

$$\dot{\rho}_{\text{mak}}(t, \vec{x}) = \langle \rho(t, \vec{x}) \rangle = -\operatorname{div} \vec{J}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{P}(t, \vec{x}). \quad (4.3.9)$$

Es ist also

$$\rho_{\text{mak}}(t, \vec{x}) = -\text{div} \vec{P}(t, \vec{x}) + \text{const}(\vec{x}). \quad (4.3.10)$$

Da die Gesamtladung erhalten ist und das Medium als ganzes ungeladen sein soll, verschwindet die Konstante, d.h. es gilt

$$\rho_{\text{mak}}(t, \vec{x}) = -\text{div} \vec{P}(t, \vec{x}). \quad (4.3.11)$$

Setzen wir nun (4.3.8) und (4.3.11) in die gemittelten inhomogenen Maxwell-Gleichungen (4.3.2) ein, erhalten wir⁵

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{rot} \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{D} = \vec{E} + \vec{P}. \quad (4.3.12)$$

Die makroskopischen Maxwellgleichungen (4.3.6) und (4.3.12) müssen wir schließlich noch durch die gemittelte Bewegungsgleichung (4.3.4) ergänzen, um zu einem selbstkonsistenten geschlossenen Gleichungssystem zu gelangen. Hierbei wirkt für ein willkürlich herausgegriffenes Elektron eine mittlere Kraft, die sich aus den mittleren intrinsischen Feldern ergeben, die aus den dieses Elektron umgebenden Ladungen auf atomarer Skala hervorgehen. In linearer Näherung können wir dies für die als klein angenommenen Auslenkungen δu von der Gleichgewichtslage durch eine Bewegung in einem harmonischen Oszillatorpotential nähern. Weiter wird sich noch durch eine Vielzahl von Stößen mit anderen Elektronen und mit Atomkernen eine Reibungskraft ergeben. Außerdem wirkt schließlich noch das makroskopische elektromagnetische Feld auf das Elektron, wobei wir allerdings aus Konsistenzgründen auch hier den magnetischen Anteil der Lorentzkraft $q\vec{v} \times \vec{B}$ vernachlässigen, was für unsere nichtrelativistische Näherung $|\vec{v}| \ll 1$ gerechtfertigt ist. Diese Überlegungen liefern dann

$$\left\langle m \partial_t^2 \delta u(t, \vec{x}) + m \Gamma \partial_t \delta u(t, \vec{x}) + m \omega_0^2 \delta u(t, \vec{x}) \right\rangle = q \vec{E}(t, \vec{x}). \quad (4.3.13)$$

Dabei haben wir einen möglichen Einfluß räumlicher Korrelationen vernachlässigt, d.h. wir sind von einem räumlich lokalen Vorgang ausgegangen. Dies ist dann gerechtfertigt, wenn die typischen Zeitskalen für die Änderung der makroskopischen Größen groß sind gegenüber den **Relaxationszeitskalen des Mediums**, d.h. die aufgrund der Störung durch das äußere elektromagnetische Feld eingebrachten räumlichen Korrelationen mitteln sich zu jedem nur „makroskopisch genau“ festgelegten Zeitpunkt heraus.

Multiplizieren wir (4.3.13) mit $N_e q$, erhalten wir gemäß (4.3.7) die gesuchte zusätzliche Gleichung für die Polarisierung

$$\ddot{\vec{P}} + \Gamma \dot{\vec{P}} + \omega_0^2 \vec{P} = \frac{Nq^2}{m^2} \vec{E} =: \omega_p^2 \vec{E}. \quad (4.3.14)$$

Wie wir sehen werden, ist die **Plasmafrequenz**

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m^2}} \quad (4.3.15)$$

die Eigenfrequenz der **kollektiven Schwingungen** der Elektronen gegen die positiven Ionen.

⁵Wir gehen hierbei davon aus, daß alle das externe elektromagnetische Feld erzeugenden Ladungen und Ströme *außerhalb des betrachteten Mediums lokalisiert* sind. Bringt man ins Medium selbst von außen zusätzliche Ladungen ein, so sind diese auf der rechten Seite der Gln. (4.3.12) als Ladungsdichte ρ_{ext} und Stromdichte \vec{j}_{ext} zu berücksichtigen. Außerdem würde bei einer Berücksichtigung von Magnetisierungseffekten noch eine Magnetisierungsdichte \vec{M} einzuführen sein und neben \vec{B} hätte man auch $\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$ als weiteres makroskopisches Feld einzuführen.

Um das nunmehr in sich geschlossene System der makroskopischen Maxwell-Gleichungen (4.3.6), (4.3.12) und der konsitutiven Gleichung (4.3.14) zu lösen, schreiben wir die Felder als Fouriertransformierte bzgl. der Zeit

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(t, \vec{x}) \\ \vec{P}(t, \vec{x}) \\ \vec{B}(t, \vec{x}) \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\omega}{2\pi} \begin{pmatrix} \vec{E}'(\omega, \vec{x}) \\ \vec{P}'(\omega, \vec{x}) \\ \vec{B}'(\omega, \vec{x}) \end{pmatrix} \exp(-i\omega t). \quad (4.3.16)$$

Die Gleichungen für die Fouriertransformierten folgen aus den Gleichungen im Zeitbereich einfach durch die Ersetzung $\partial_t \rightarrow -i\omega$:

$$\operatorname{div} \vec{B}' = 0, \quad (4.3.17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}' - i\omega \vec{B}' = 0, \quad (4.3.18)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}' + i\omega \vec{D}' = 0, \quad (4.3.19)$$

$$\vec{D}' = \vec{E}' + \vec{P}', \quad (4.3.20)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}' = 0, \quad (4.3.21)$$

$$(\omega_0^2 - i\omega\Gamma - \omega^2)\vec{P}' = \omega_p^2 \vec{E}'. \quad (4.3.22)$$

Es ist klar, daß die Gleichungen (4.3.17) und (4.3.21) redundant sind, da $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$, so daß sie aus (4.3.18) und (4.3.19) folgen. Um die Felder im Medium aus ihren Anfangsbedingungen zu berechnen, benötigen wir also nur (4.3.18, 4.3.19, 4.3.20, 4.3.22).

Wir betrachten zunächst die Gleichung für die **makroskopische Ladungsdichte**, die gemäß (4.3.11) mit der Polarisation durch

$$\rho'_{\text{mak}} = -\operatorname{div} \vec{P}' \quad (4.3.23)$$

zusammenhängt, in verschiedenen physikalischen Situationen. Aus (4.3.20-4.3.22) folgt wegen (4.3.23)

$$\operatorname{div} \vec{E}' = -\operatorname{div} \vec{P}' = \rho'_{\text{mak}}, \quad (\omega^2 + i\omega\Gamma - \omega_0^2 - \omega_p^2)\rho'_{\text{mak}} = 0. \quad (4.3.24)$$

Im Falle eines **Plasmas** sind die Elektronen und Atomkerne vollständig ionisiert, und wir haben $\omega_0 \ll \omega_p$. Dann können wir ω_0^2 gegen ω_p^2 vernachlässigen und erhalten im Raumzeit-Bereich die Schwingungsgleichung

$$(\partial_t^2 + \Gamma \partial_t + \omega_p^2)\rho_{\text{mak}}(t, \vec{x}) = 0. \quad (4.3.25)$$

Für nicht zu dichte Plasmen ist auch die Dämpfung $\Gamma \ll \omega_p$, und dann beschreibt (4.3.24) **kollektive Schwingungen** der Elektronen gegen die positiv geladenen Kerne, wobei die Schwingungsfrequenz durch die **Plasmafrequenz** gegeben ist. Allerdings müssen wir berücksichtigen, daß die Gültigkeit dieser einfachen Betrachtungen dadurch eingeschränkt ist, daß für dünne Plasmen eine Vernachlässigung der räumlichen Korrelationen zwischen den Ladungsträgern i.a. nicht mehr gerechtfertigt ist. Wir werden weiter unten in der quantenfeldtheoretischen Behandlung darauf noch näher eingehen. Dort wird sich zeigen, daß sich die quantisierten Plasmaschwingungen, die **Plasmonen**, als **Quasiteilchen** interpretieren lassen, deren **Dispersionsrelationen** (d.h. der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls) sich aus dem Photonenpropagator herleiten läßt. Es handelt sich um die effektive **Masse von Photonen im Medium** im Limes kleiner Frequenzen (bzw. großer Wellenlängen).

Nun betrachten wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Medium. Rotationsbildung von (4.3.18) liefert dann wegen

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}' - \Delta \vec{E}' - i\omega \operatorname{rot} \vec{B}' \stackrel{(4.3.19)}{=} -\Delta \vec{E}' - \omega^2 \vec{D}' = 0. \quad (4.3.26)$$

Wir eliminieren nun mit Hilfe von (4.3.20) und (4.3.22) \vec{D}' vermöge

$$\vec{D}'(\omega, \vec{x}) = \epsilon'(\omega) \vec{E}'(\omega, \vec{x}), \quad (4.3.27)$$

wobei die **Permittivität** durch

$$\epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma} \quad (4.3.28)$$

gegeben ist. Dann erhalten wir aus (4.3.26) die Gleichung

$$\Delta \vec{E}'(\omega, \vec{x}) - \text{grad div } \vec{E}' + \omega^2 \epsilon'(\omega) \vec{E}'(\omega, \vec{x}) = 0. \quad (4.3.29)$$

Um diese Gleichung zu interpretieren, wählen wir den einfachsten Fall einer sich in z-Richtung ausbreitenden ebenen Welle

$$\vec{E}'(\omega, \vec{x}) = \vec{A} \exp(ik_z z) \quad (4.3.30)$$

Betrachten wir zunächst Longitudinalwellen, d.h.

$$\vec{E}'_L(\omega, \vec{x}) = A \vec{e}_z \exp(ik_z z). \quad (4.3.31)$$

Dies in (4.3.29) eingesetzt liefert

$$\omega^2 \epsilon'(\omega) A = 0. \quad (4.3.32)$$

Wir erhalten nur ein nichttriviales Resultat falls entweder $\omega = 0$ oder $\epsilon'(\omega) = 0$ ist. Im ersten Fall haben wir ein **statisches elektrisches Feld**. Andernfalls muß $\epsilon'(\omega) = 0$ sein, was nur für ein komplexes ω mit

$$\omega^2 - (\omega_0^2 + \omega_p^2) - i\omega\Gamma = 0 \quad (4.3.33)$$

vorliegen kann. Wir haben dann gedämpfte Schwingungen entsprechend den oben besprochenen Plasmaschwingungen der elektrischen Ladungsdichte. Die räumliche Abhängigkeit folgt aus den Anfangsbedingungen, d.h. das longitudinale elektrische Feld entspricht einer stehenden Welle. In der Näherung kleiner Bindung und Dämpfung $\omega_0 = \Gamma = 0$, ist die Schwingungsfrequenz die Plasmafrequenz. Wir werden im nächsten Abschnitt im Rahmen der kinetischen Theorie noch realistischere qualitative Betrachtungen für dünne Plasmen anstellen, wenn wir die in diesem Falle nicht mehr vernachlässigbare **räumliche Dispersion** berücksichtigen.

Interessanter ist der Fall **transversaler Wellen**. Dann ist

$$[\omega^2 \epsilon'(\omega) + \Delta] \vec{E}' = 0 \quad (4.3.34)$$

eine echte Wellengleichung. Betrachten wir wieder den einfachsten Fall sich in z-Richtung ausbreitender Wellen der Form

$$\vec{E}'_k(\omega, \vec{x}) = \vec{e}_x A(\omega) \exp(ikz), \quad (4.3.35)$$

folgt aus (4.3.34), daß für nichttriviale Lösungen $A(\omega) \neq 0$ die **Dispersionsrelation**

$$k(\omega) = \pm \omega n(\omega) \quad \text{mit} \quad n(\omega) = \sqrt{\epsilon'(\omega)} \quad (4.3.36)$$

gelten muß. I.a. wird sich also das Signal aus zwei sich nach positiver bzw. negativer z-Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Wellen zusammensetzen.

Hier betrachten wir nur den einfachsten Fall, daß bei $z = 0$

$$\vec{E}'(t, z = 0) = E_0 \vec{e}_x \Theta(t) \sin(\Omega t) \quad (4.3.37)$$

ist und sich die Welle ausschließlich in positive z -Richtung ausbreitet. Dann gilt wegen (4.3.35-4.3.36)

$$\vec{E}(t, z) = \vec{e}_x \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} A(\omega) \exp\{i\omega[n(\omega)z - t]\}. \quad (4.3.38)$$

Setzen wir in (4.3.38) $z = 0$, ergibt sich

$$A(\omega) = \frac{\Omega}{\Omega^2 - (\omega + i0^+)^2} E_0. \quad (4.3.39)$$

In unserem einfachen Oszillatormodell ist der Zusammenhang zwischen Wellenzahl und Frequenz gemäß (4.3.36)

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon'(\omega)} = \omega \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega}} =: \omega n(\omega). \quad (4.3.40)$$

Betrachten wir nun das Fourier-Integral (4.3.38) mit der für den halbseitig unendlichen ebenen Wellenzug berechneten Amplitude (4.3.39). Da für $\omega \rightarrow \infty$ der Brechungsindex $n(\omega) \rightarrow 1$ strebt, können wir zur Berechnung des Integrals den Residuensatz anwenden, indem wir uns den Integrationsweg entlang der reellen Achse durch einen Halbkreis im Unendlichen geschlossen denken. Dabei muß für $t < z$ der Halbkreis in der oberen Halbebene liegen, damit sein Beitrag verschwindet (und nicht zu divergenten Integralen führt). Da sowohl A als auch n in der oberen ω -Halbebene analytische Funktionen sind, verschwindet in diesem Fall das Integral, d.h. wir haben

$$\vec{E}(t, z) = 0 \quad \text{für } t < z. \quad (4.3.41)$$

Unser Modell ist also mit dem **relativistischen Kausalitätsprinzip** vereinbar, demzufolge sich der Wellenkopf nicht schneller als mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 1$ ausbreiten kann [Som07]. Wie wir sehen, ist dafür bereits die schwächere generelle Kausalitätsforderung hinreichend, die nur verlangt, daß $\epsilon'(\omega)$ in der oberen komplexen ω -Halbebene analytisch ist. Daß für $t < z$ kein Feld vorliegt, haben wir weiter durch die Anfangsbedingung (4.3.37) sichergestellt.

Für $t > z$ setzt die Erregung des Mediums durch die einfallende elektromagnetische Welle ein. Wir werden die damit verbundenen an sich sehr interessanten Phänomene hier nicht weiter verfolgen. Für eine ausführliche Erörterung sei auf die sehr lesenswerten Arbeiten von Sommerfeld und Brillouin [Som14, Bri14] sowie die Lehrbücher [Som78, Jac83] verwiesen (s. auch [Hee09]). Betrachten wir zunächst sehr große Zeiten $t \gg z$. Dann erwarten wir, daß die Eigenschwingungen des Mediums aufgrund der Dämpfung Γ abgeklungen sind und nunmehr das elektromagnetische Feld mit der vorgegebenen Frequenz Ω schwingt. Dies erhalten wir, indem wir uns (4.3.38) durch den in der unteren ω -Halbebene geschlossenen Integrationsweg ausgeführt denken. Diesen Integrationsweg können wir nun unter Berücksichtigung der Singularitäten des Integranden deformieren (vgl. Abb. 4.3). Schreiben wir den komplexen Brechungsindex gemäß (4.3.40) in der Form

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{(\omega + i\Gamma/2)^2 - (\omega_0^2 + \omega_p^2 - \Gamma^2/4)}{(\omega + i\Gamma/2)^2 - (\omega_0^2 - \Gamma^2/4)}}, \quad (4.3.42)$$

sehen wir, daß dessen Singularitäten die zur reellen Achse parallelen Strecken

$$\pm[\omega_1, \omega_2] - i\frac{\Gamma}{2}, \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \Gamma^2/4} \quad (4.3.43)$$

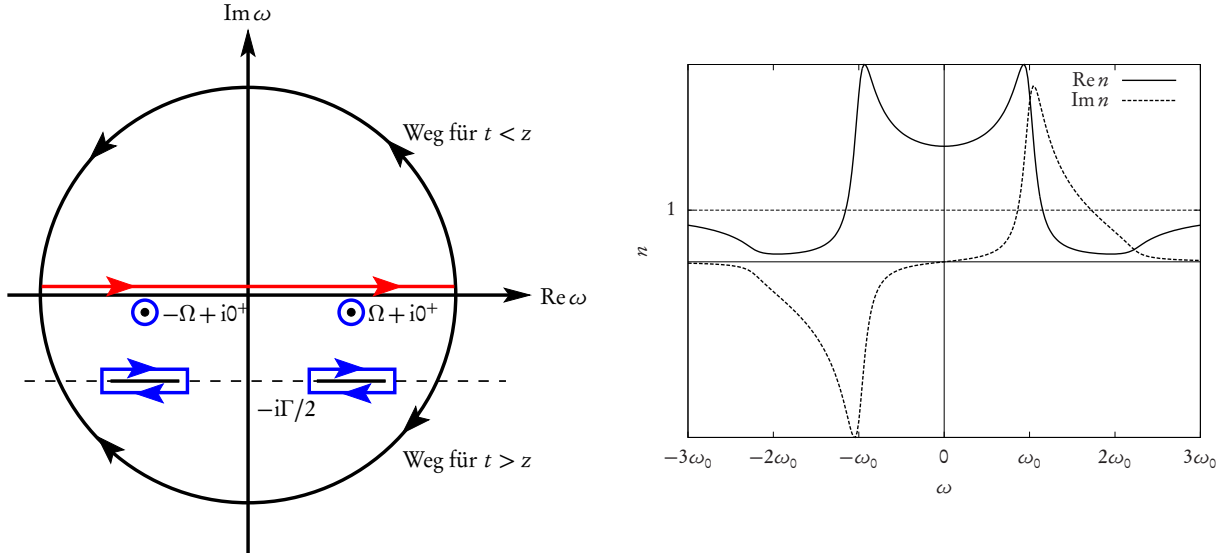


Abbildung 4.3: Links: Konturen zur Berechnung des Fourier-Integrals (4.3.38). Der ursprüngliche Integrationsweg entlang der reellen Achse (rot) kann zunächst durch Halbkreise geschlossen werden, und zwar für $t < z$ ($t > z$) in der oberen (unteren) Halbebene. Bei der Integration für $t > z$ kann die Kontur aufgrund der Analytizitätsstruktur des Integranden zu den blau eingezeichneten geschlossenen Wegen deformiert werden. Die blau eingezeichneten Strecken parallel zur reellen Achse sind die Schnitte des komplexen Brechungsindex' (4.3.44). Bei $\omega = \pm\Omega - i0^+$ liegen die Pole der Funktion (4.3.39). Rechts: Real- und Imaginärteil des Brechungsindex' gemäß dem Resonanzmodell (4.3.42).

sind, denn dort wird das Argument der Wurzel negativ reell. Für $t \gg z$ sind die Beiträge der Integrale über die Diskontinuitäten entlang des Schnitts vernachlässigbar, weil sie stets den Dämpfungsfaktor $\exp(-\Gamma t/2)$ enthalten.

Für $t \gg z$ tragen also wesentlich nur die beiden Pole 1. Ordnung der Funktion A , also $\omega_{1/2} = \pm\Omega - i0^+$, bei und liefern aufgrund des Residuensatzes

$$\vec{E}(t, z) \underset{t \gg z}{\cong} \frac{\vec{E}_0}{2i} \{ \exp[i\Omega(t - zn^*(\Omega))] - \exp[-i\Omega(t - zn(\Omega))] \}. \quad (4.3.44)$$

Dabei haben wir die aus der Realität von \vec{E} folgende Beziehung $n(-\Omega) = n^*(\Omega)$ für $\Omega \in \mathbb{R}$ benutzt. Trennen wir n in Real- und Imaginärteil auf,

$$n(\Omega) = n_0(\Omega) + i\chi(\Omega), \quad (4.3.45)$$

erhalten wir

$$\vec{E}(t, z) \underset{t \gg z}{\cong} \vec{E}_0 \exp[-\Omega\chi(\Omega)z] \sin[\Omega(t - n_0(\Omega)z)]. \quad (4.3.46)$$

Wir haben also im eingeschwungenen Zustand in der Tat eine mit der Phasengeschwindigkeit

$$c_{\text{Phase}} = \frac{1}{n_0(\Omega)} \quad (4.3.47)$$

fortschreitende Welle mit der durch die einfallende Welle vorgegebenen Frequenz Ω , deren Amplitude entsprechend der vom Signal zurückgelegten Strecke z gedämpft ist.

Ein weiteres Charakteristikum des Mediums ist die **Gruppengeschwindigkeit**. Diese gibt in vielen Fällen die Geschwindigkeit des Schwerpunkts eines **Wellenpaketes** wieder. Zu diesem Begriff gelangen wir, wenn wir in (4.3.38) ein A wählen, das in einem relativ engen Frequenzbereich gepeakt ist. Wie wir oben gesehen haben, erfordert die Kausalität lediglich, daß diese Funktion in der oberen ω -Halbebene analytisch ist. Wir können also insbesondere auch eine überall analytische Funktion verwenden, z.B. ein Gaußsches Wellenpaket

$$A(\omega) = \vec{E}_0 \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta\Omega} \exp \left[-\frac{(\omega - \Omega)^2}{2\Delta\Omega^2} \right]. \quad (4.3.48)$$

Im Vakuum ist in (4.3.38) $n(\omega) = 1$ zu setzen, und wir erhalten ein Wellenpaket der Frequenz Ω . Die Einhüllende ist wiederum eine Gaußfunktion, deren Maximum sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt:

$$\vec{E}_{\text{vac}}(t, z) = \vec{E}_0 \exp[-i\Omega(t - z)] \exp \left[-\frac{\Delta\Omega^2}{2}(t - z)^2 \right]. \quad (4.3.49)$$

Im Medium können wir in der Exponentialfunktion die Entwicklung

$$\omega t - k(\omega)z = \omega t - [k(\Omega) + k'(\Omega)(\omega - \Omega)]z + \mathcal{O}[(\omega - \Omega)^2] \quad (4.3.50)$$

mit $k(\omega) = \omega n(\omega)$ verwenden, vorausgesetzt k variiert in der Umgebung von $\omega = \Omega$ nicht zu stark. Beim Integral können wir die Terme $\mathcal{O}[(\omega - \Omega)^2]$ vernachlässigen, da diese Beiträge zu $\vec{E}(t, z)$ der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta\Omega^2)$ ergeben. Ist also $\Delta\Omega$ nicht zu groß, gilt

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 \exp \{-i\Omega[t - n(\omega)z]\} \exp \left\{ -\frac{\Delta\Omega^2}{2}[t - k'(\Omega)z]^2 \right\}. \quad (4.3.51)$$

Wie wir sehen, bewegt sich der Schwerpunkt der einhüllenden Gaußfunktion mit der **Gruppengeschwindigkeit**

$$v_g = \frac{1}{k'(\Omega)} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k(\Omega)}. \quad (4.3.52)$$

Innerhalb der Wellengruppe breiten sich die Wellen mit der Phasengeschwindigkeit (4.3.47) aus.

Es ist wichtig zu bemerken, daß diese Näherung die Wellenausbreitung nur dann gut wiedergibt, wenn $k(\omega)$ um $\omega = \Omega$ nicht zu stark variiert. Dies trifft in unserem Resonanzmodell insbesondere für den Fall schwacher Dämpfung ($\Omega \gg \Gamma$) in der Nähe der Resonanz *nicht* zu. Die Gruppengeschwindigkeit nimmt in Bereichen **anomaler Dispersion** Werte $v_g > c$ an. Wie wir jedoch oben gesehen haben, ist bei einer scharfen Wellenfront die **Frontgeschwindigkeit** stets c , und es kann kein Signal im Widerspruch zur Einstein-Kausalität vor der Lichtlaufzeit im Vakuum eintreffen.

4.3.2 Quantenfeldtheoretische Formulierung

Wir betrachten nun zunächst wieder eine Feldtheorie für ein geladenes Skalarfeld wie das lineare σ -Modell in Abschnitt 3.1. Es sei dann $\Phi(x)$ irgendein lokaler Feldoperator, der aus ϕ und dessen Ableitungen aufgebaut sei. Wir betrachten ein System im thermodynamischen Gleichgewicht und schalten zur Zeit $t = t_0$ eine Störung der Form

$$\mathbf{H}_{\text{ext}}^{(H)} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} j_{\text{ext}}(x) \phi^{(H)}(x) \quad (4.3.53)$$

ein, wobei j_{ext} eine äußere Quelle mit $j_{\text{ext}}(x) = 0$ für $t < t_0$ bezeichnet, ein. Wir arbeiten im Heisenbergbild des ungestörten Hamiltonoperators und betrachten die Feldoperatoren bei reellen Zeiten, d.h. deren Zeitentwicklung wird durch den vollständigen Hamiltonoperator (ohne die äußere Störung) bestimmt

$$i\partial_t \Phi^{(\text{H})}(x) = [\Phi^{(\text{H})}(x), \mathbf{H}]. \quad (4.3.54)$$

Im Sinne eines Wechselwirkungsbildes mit (4.3.53) als Störung, ist die Zeitentwicklung der Zustände bzw. des Statistischen Operators durch

$$\psi(\mathbf{t}) = \mathbf{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{U}(t, t_0) \mathbf{R}(t_0) \mathbf{U}^\dagger(t, t_0) \quad (4.3.55)$$

gegeben, wobei der Zeitentwicklungsoperator der Bewegungsgleichung

$$i\partial_t \mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{H}_{\text{ext}}^{(\text{H})}(t) \mathbf{U}(t, t_0), \quad \mathbf{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad (4.3.56)$$

genügt.

Wir nehmen nun an, daß die Störung (4.3.53) so schwach ist, daß es ausreicht, den Zeitentwicklungsoperator \mathbf{U} in der ersten Ordnung der Störungsrechnung zu nähern:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}_{\text{ext}}^{(\text{H})}(t'). \quad (4.3.57)$$

Die Zeitentwicklung des Statistischen Operators ist demnach gemäß (4.3.55) in dieser Näherung durch

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) - i \int_0^t dt' [\mathbf{H}_{\text{ext}}^{(\text{H})}(t'), \mathbf{R}(t_0)] \quad (4.3.58)$$

gegeben, und für den Erwartungswert einer beliebigen lokalen Observablen $\psi(x)$ folgt

$$\langle \Psi(x) \rangle = \text{Tr}[\mathbf{R}(t) \Psi^{(\text{H})}(x)] = \text{Tr}[\mathbf{R}(t_0) \Psi^{(\text{H})}(x)] - i \int_{t_0}^t dt' \text{Tr} \{ [\mathbf{H}^{(\text{H})}(t'), \mathbf{R}(t_0)] \Psi^{(\text{H})}(x) \}. \quad (4.3.59)$$

Schreiben wir den Kommutator in dem Integral aus und verwenden die zyklische Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur, können wir diesen Ausdruck als Erwartungswert bzgl. $\mathbf{R}(t_0)$ ausdrücken. Da sich das System zur Zeit t_0 voraussetzungsgemäß im Gleichgewicht befinden sollte, ist

$$\mathbf{R}(t_0) = \frac{1}{Z(\beta, \mu)} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu \mathbf{Q})] \quad \text{und} \quad \langle \dots \rangle_{\beta, \mu} := \text{Tr}[\mathbf{R}(t_0) \dots]. \quad (4.3.60)$$

Daher ergibt sich als **lineare Antwort** der (lokalen) Observablen Ψ auf die Störung des Systems durch (4.3.53)

$$\langle \Psi(x) \rangle = \langle \Psi^{(\text{H})} \rangle_{\beta, \mu} + \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' D_{\Psi\Phi}^{(\text{ret})}(t - t', \vec{x} - \vec{x}') j_{\text{ext}}(x') \quad (4.3.61)$$

mit der **retardierten Korrelationsfunktion**

$$D_{\Psi\Phi}^{(\text{ret})}(x) = -i\Theta(t) \langle [\Psi^{(\text{H})}(x), \Phi^{(\text{H})}(0)] \rangle_{\beta, \mu}. \quad (4.3.62)$$

Dabei haben wir die Translationsinvarianz des Gleichgewichtszustandes und des ungestörten Hamiltonoperators benutzt, die impliziert, daß die Korrelationsfunktion eine Funktion der Vierervektordifferenz $(x - x')$ sein muß.

Als konkretes Beispiel für das **QED-Plasma** wollen wir die Störung durch ein äußeres elektromagnetisches Feld untersuchen und als Observable das gesamte elektromagnetische Feld im Medium betrachten. Wie wir sehen werden, erhalten wir dann ein detailliertes quantenfeldtheoretisches Modell für die **Permittivität** des Plasmas, welche wir dann mit den störungstheoretischen Methoden des vorigen Kapitels näherungsweise berechnen können. Wie wir sehen werden, wird dabei auch gleich noch die im obigen klassischen Modell vernachlässigte **räumliche Dispersion** [LL90], welche gerade für verdünnte Plasmen wichtig wird, berücksichtigt.

Betrachten wir also ein äußeres elektromagnetisches Feld $(\vec{E}_{\text{ext}}, \vec{B}_{\text{ext}})$ als Störung. Es ist für die folgende Analyse am einfachsten, sich dieses Feld aus klassischen elektrischen Ladungs- und Stromdichten j_{ext}^μ erzeugt vorzustellen. Die externen Felder genügen dann den Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = j_{\text{ext}}^0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_{\text{ext}} - \partial_t \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{j}_{\text{ext}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{ext}} + \partial_t \vec{B}_{\text{ext}} = 0. \quad (4.3.63)$$

Es ist klar, daß dies für den Viererstrom die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j_{\text{ext}}^\mu = \partial_t j_{\text{ext}}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{ext}} = 0 \quad (4.3.64)$$

impliziert. Der Störhamiltonoperator ist dann

$$\mathbf{H}_{\text{ext}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} j_{\text{ext}}^\mu(x) \mathbf{A}_\mu(x). \quad (4.3.65)$$

Da im thermischen Gleichgewicht für ein neutrales Plasma⁶ $\langle \mathbf{A}_\mu \rangle_{\beta, \mu} = 0$ ist, ergibt sich für das durch die Störung bewirkte elektromagnetische Feld im Medium

$$A_\mu(x) := \langle A_\mu(x) \rangle_{\beta, \mu} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' D_{\mu\nu}^{(\text{ret})}(x - x') j_{\text{ext}}^\nu(x'). \quad (4.3.66)$$

Dabei ist

$$D_{\mu\nu}^{(\text{ret})}(x) = -i\Theta(t) \left\langle \left[\mathbf{A}_\mu^{(\text{H})}(x), \mathbf{A}_\nu^{(\text{H})}(0) \right] \right\rangle_{\beta, \mu} \quad (4.3.67)$$

der **exakte retardierte Photonpropagator** im Medium.

Falls gar kein Medium vorhanden ist, wird dieser Propagator unter Vernachlässigung von **Quantenfluktuationen** zum **freien Propagator** $D_{\mu\nu}^{(0, \text{ret})}$, und die Antwort des Vakuums ist

$$A_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' D_{\mu\nu}^{(0, \text{ret})}(x - x') j_{\text{ext}}^\nu(x') = A_\mu^{(\text{ext})}(x). \quad (4.3.68)$$

Das bedeutet, daß (4.3.66) bereits das *totale elektromagnetische Viererpotential* unter Einbeziehung des äußeren Feldes darstellt. Es ist auch klar, daß die Viererpotentiale **eichabhängige Größen** sind. Diese Eichabhängigkeit kommt in (4.3.67) bzw. (4.3.68) durch die Wahl der Eichung bei der Quantisierung ins Spiel. In unserem Fall ist dies die Coulomb Eichung, und der **freie retardierte Propagator** ist (im Impulsraum ausgedrückt)

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0, \text{ret})}(q) = -\frac{U_\mu U_\nu}{q^2 - (q \cdot U)^2} + P_{\perp \mu\nu}(q) \frac{1}{(q^0 + i0^+)^2 - \vec{q}^2}. \quad (4.3.69)$$

⁶Wir gehen im folgenden davon aus, daß das chemische Potential für die elektrische Ladung $\mu = 0$ ist, d.h. unser Plasma besteht aus genauso vielen Elektronen wie Positronen.

Dabei ist

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0)^T, \quad P_{\perp}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu + \frac{[q^\mu - U^\mu(q \cdot U)][q^\nu - U^\nu(q \cdot U)]}{q^2 - (q \cdot U)^2}. \quad (4.3.70)$$

Wir werden uns mit diesem Propagator und entsprechend mit dem exakten Propagator (4.3.67) noch ausführlich zu beschäftigen haben, um die physikalische Bedeutung dieser eichabhängigen Größe herauszuarbeiten. Wir schieben aber nun zuerst einen Abschnitt ein, der sich mit der Frage befaßt, wie wir aus den **Matsubara-Green-Funktionen** des Imaginärzeitformalismus die **retardierten Green-Funktionen** für reelle Zeiten berechnen können.

4.4 Analytische Eigenschaften Greenscher Funktionen

Wie wir gesehen haben, benötigen wir für die lineare Antworttheorie des QED-Plasmas den **exakten retardierten Photonpropagator** (4.3.67). Diesen können wir freilich nur näherungsweise mit Störungstheorie berechnen. Bislang haben wir aber nicht den retardierten Propagator, eine Größe für reelle Zeiten, sondern den Propagator des Matsubara-Imaginärzeitformalismus berechnet. In diesem Abschnitt wollen wir nun zeigen, wie wir aus den **Matsubara-Green-Funktionen** durch analytische Fortsetzung in der q^0 -Ebene den **retardierten Propagator im Medium** berechnen können.

4.4.1 Skalare Teilchen

Dazu betrachten wir zunächst wieder den Fall des geladenen Skalarfeldes. Dies hat den Vorteil, daß wir zugleich den Fall mit chemischem Potential behandeln können. Für das folgende führen wir eine etwas geänderte Notation für die Heisenberg-Feldoperatoren ein. Für reelle Zeiten bezeichnen wir den Feldoperator mit $\phi^{(H)}(x)$. Dieser Feldoperator erfüllt die Bewegungsgleichung mit dem vollen Hamiltonoperator für reelle Zeiten

$$i\partial_t \phi^{(H)}(x) = [\mathbf{H}, \phi^{(H)}(x)]. \quad (4.4.1)$$

Weiter führen wir die großkanonischen wechselwirkenden Feldoperatoren $\phi_{\beta, \mu}^{(K)}(x)$ ein. Für reelle Zeitargumente gilt

$$i\partial_t \phi^{(K)}(x) = [\mathbf{K}, \phi^{(K)}(x)]. \quad (4.4.2)$$

Dabei ist der **großkanonische Hamiltonoperator** durch

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu \mathbf{Q} \quad (4.4.3)$$

definiert, wobei \mathbf{Q} den Operator der erhaltenen Ladung bezeichnet. Der Zusammenhang mit den **Matsubara-Imaginärzeitfeldoperatoren** aus Kapitel 3 ist dann durch

$$\phi^{(M)}(\tau, \vec{x}) = \phi^{(K)}(-i\tau, \vec{x}), \quad \phi^{(M)*}(\tau, \vec{x}) = \phi^{(K)\dagger}(-i\tau, \vec{x}) \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R} \quad (4.4.4)$$

gegeben.

Nun gilt (3.1.21) nicht nur für die Operatoren im Wechselwirkungsbild, die sich definitionsgemäß zeitlich gemäß dem freien großkanonischen Hamiltonoperator entwickeln, sondern auch für die Operatoren im Heisenberg-Bild, denn zur Herleitung dieser Gleichung benötigten wir nur die Kommutatorrelation (3.1.19), und diese folgt aus dem Noethertheorem auch für die Heisenberg-Feldoperatoren. Es gilt also

$$\phi^{(H)}(x) = \exp(-i\mu t) \phi^{(K)}(x). \quad (4.4.5)$$

Wir betrachten nun also den exakten retardierten Propagator bzgl. des großkanonischen Hamiltonoperators

$$D_{\text{ret}}^{(\text{K})}(x) = -i\Theta(t) \left\langle \left[\phi^{(\text{K})}(x), \phi^{(\text{K})\dagger}(0) \right] \right\rangle_{\beta, \mu}. \quad (4.4.6)$$

Um die Verbindung zum exakten **Matsubara-Propagator**

$$\mathfrak{D}(x) = \left\langle \mathcal{T}_\tau \phi^{(\text{M})}(x) \phi^{(\text{M})\ast}(0) \right\rangle_{\beta, \mu} \quad \text{mit } x^0 = \tau \quad (4.4.7)$$

herzustellen, betrachten wir zunächst die **Kommutatorfunktion**

$$K^{(\text{K})}(x) = -i \left\langle \left[\phi^{(\text{K})}(x), \phi^{(\text{K})\dagger}(0) \right] \right\rangle_{\beta, \mu} \quad (4.4.8)$$

und ihre Fouriertransformierte

$$\tilde{K}^{(\text{K})}(k) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x K^{(\text{K})}(x) \exp(ik \cdot x). \quad (4.4.9)$$

Durch hermitesche Adjunktion von (4.4.8) folgt

$$[K^{(\text{K})}(x)]^* = i \left\langle \left[\phi^{(\text{K})}(0), \phi^{(\text{K})\dagger}(x) \right] \right\rangle_{\beta, \mu} = -K^{(\text{K})}(-x). \quad (4.4.10)$$

Dabei haben wir wieder die Translationsinvarianz ausgenutzt, wonach $K^{(\text{K})}$ eine Funktion der Differenz der Argumente der Feldoperatoren im Kommutator sein muß. Verwenden wir dies in (4.4.9), folgt, daß $i\tilde{K}^{(\text{K})} \in \mathbb{R}$ ist:

$$[i\tilde{K}^{(\text{K})}(k)]^* = i\tilde{K}^{(\text{K})}(k). \quad (4.4.11)$$

Wenden wir uns nun der retardierten großkanonischen Greenschen Funktion (4.4.6) zu, sehen wir, daß wegen

$$\tilde{\Theta}(k^0) = \frac{i}{k^0 + i0^+} \quad (4.4.12)$$

und des Faltungssatzes

$$\tilde{D}_{\text{ret}}^{(\text{K})}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{i}{(k_0 + i0^+) - k'_0} \tilde{K}^{(\text{K})}(k'_0, \vec{k}) \quad (4.4.13)$$

gilt. Dies ist die **Källen-Lehmann-Darstellung** der retardierten großkanonischen Greenschen Funktion. Verwenden wir die allgemeine Formel

$$\frac{1}{x + i0^+} = \text{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x), \quad (4.4.14)$$

folgt wegen (4.4.11) die **Spektralfunktion**

$$A^{(\text{K})}(k) = -2\text{Im} \tilde{D}_{\text{ret}}^{(\text{K})}(k) = i\tilde{K}^{(\text{K})}(k). \quad (4.4.15)$$

Die Matsubara-Green-Funktion (4.4.7) ergibt sich aufgrund der KMS-Bedingung als Erwartungswert eines festgeordneten Feldoperatorprodukts:

$$\tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) = \int_0^\beta d\tau \exp(i\omega_n \tau) \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \mathfrak{D}(\tau, \vec{x}). \quad (4.4.16)$$

Wir benötigen also die **Wightman-Funktionen**

$$iD^{(K)+-}(x) = \left\langle \phi^{(K)}(x) \phi^{(K)\dagger}(0) \right\rangle_{\beta, \mu}, \quad (4.4.17)$$

$$iD^{(K)-+}(x) = \left\langle \phi^{(K)\dagger}(0) \phi^{(K)}(x) \right\rangle_{\beta, \mu}. \quad (4.4.18)$$

Unter der Annahme, daß der Realteil des Exponenten in der Spur über den großkanonischen Statistischen Operators die Existenz dieser Spur garantiert, ist $D^{(K)-+}(x)$ für komplexwertige Zeitargumente definiert, wenn $0 < \text{Im } t < \beta$ und $D^{(K)+-}(x)$ für $-\beta < \text{Im } t < 0$. In diesen Streifen parallel zur reellen Zeitachse sind dann die Wightmanfunktionen analytische Funktionen bzgl. t . Wie bei der Herleitung der KMS-Bedingung zeigt man unter Verwendung der Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur, daß für $-\beta < \text{Im } t < 0$

$$D^{(K)+-}(x) = D^{(K)-+}(t + i\beta, \vec{x}) \quad (4.4.19)$$

gilt. Im Impulsraum folgt daraus durch Fourier-Transformation

$$\tilde{D}^{(K)+-}(k) = \exp(k^0 \beta) \tilde{D}^{(K)-+}(k). \quad (4.4.20)$$

Der Zusammenhang zur Spektralfunktion ergibt sich aus (4.4.8), (4.4.15) und (4.4.20)

$$A^{(K)}(k) = i \left[\tilde{D}^{(K)+-}(k) - \tilde{D}^{(K)-+}(k) \right] = i [\exp(k^0 \beta) - 1] \tilde{D}^{(K)-+}(k) \quad (4.4.21)$$

bzw.

$$i \tilde{D}^{(K)-+}(k) = f_B(k^0) A^{(K)}(k). \quad (4.4.22)$$

Verwenden wir nochmals (4.4.20), erhalten wir

$$i \tilde{D}^{(K)+-}(k) = [1 + f_B(k^0)] A^{(K)}(k). \quad (4.4.23)$$

Nun ist für $\tau > 0$

$$\mathfrak{D}(\tau, \vec{x}) \stackrel{\tau \geq 0}{=} iD^{(K)+-}(-i\tau, \vec{x}). \quad (4.4.24)$$

Setzen wir dies in (4.4.16) ein, ergibt sich

$$\tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) = i \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{D}^{(K)+-}(k') \exp(-k'_0 \tau + i\vec{k}' \cdot \vec{x}) \exp(i\omega_n \tau - i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (4.4.25)$$

Verwenden wir hierin (4.4.23) und führen die Integrale über τ , \vec{x} und \vec{k}' aus, erhalten wir

$$\tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{A^{(K)}(k'_0, \vec{k})}{i\omega_n - k'_0}. \quad (4.4.26)$$

Vergleichen wir dies mit (4.4.13), sehen wir, daß sich sowohl die retardierte als auch die Matsubara-Green-Funktion durch die **analytische Green-Funktion**

$$\tilde{D}_{\text{ana}}^{(K)}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{A^{(K)}(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0} \quad \text{mit } k_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad (4.4.27)$$

ausdrücken lassen:

$$\tilde{D}_{\text{ret}}^{(K)}(k) = \tilde{D}_{\text{ana}}^{(K)}(k_0 + i0^+, \vec{k}), \quad (4.4.28)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}(i\omega_n, \vec{k}) = -\tilde{D}_{\text{ana}}^{(K)}(i\omega_n, \vec{k}). \quad (4.4.29)$$

Wir erhalten also die analytische Green-Funktion aus der analytischen Fortsetzung der Matsubara-Green-Funktion gemäß (4.4.29), und diese wiederum ergibt die retardierte Green-Funktion bzgl. der Zeitentwicklung mit dem großkanonischen Hamilton-Operator.

Es bleibt schließlich noch zu zeigen, wie wir daraus auch auf die retardierte Green-Funktion bzgl. der Zeitentwicklung mit dem gewöhnlichen Hamilton-Operator schließen können. Dies ist wegen (4.4.5) sehr einfach, denn es gilt auch für die retardierte Greensche Funktion

$$D_{\text{ret}}(x) = -i \left\langle \left[\phi^{(\text{H})}(x), \phi^{(\text{H})\dagger}(0) \right] \right\rangle_{\beta, \mu} \quad (4.4.30)$$

die entsprechende **Källen-Lehmann-Darstellung**

$$\tilde{D}_{\text{ret}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk'_0 \frac{A^{(\text{H})}(k'_0, \vec{k})}{(k_0 + i0^+) - k'_0} \quad (4.4.31)$$

mit der Spektralfunktion

$$A^{(\text{H})}(k) = i\tilde{K}^{(\text{H})}(k) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \underbrace{\left\langle \left[\phi^{(\text{H})}(x), \phi^{(\text{H})\dagger}(0) \right] \right\rangle_{\beta, \mu}}_{iK^{(\text{H})}(x)} \exp(ik \cdot x). \quad (4.4.32)$$

Wegen (4.4.5) ist aber

$$K^{(\text{H})}(x) = \exp(-i\mu t) K^{(\text{K})}(x), \quad (4.4.33)$$

und dies in (4.4.32) eingesetzt liefert nach kurzer Rechnung

$$A^{(\text{H})}(k) = i\tilde{K}^{(\text{H})}(k) = i\tilde{K}^{(\text{K})}(k^0 - \mu, \vec{k}) = A^{(\text{K})}(k_0 - \mu, \vec{k}) \quad (4.4.34)$$

und damit

$$\tilde{D}_{\text{ana}}^{(\text{H})}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{A^{(\text{K})}(k_0 - \mu, \vec{k})}{k_0 - k'_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{A^{(\text{K})}(k_0, \vec{k})}{k_0 - \mu - k'_0} = \tilde{D}_{\text{ana}}^{(\text{K})}(k_0 - \mu, \vec{k}). \quad (4.4.35)$$

Wir bemerken noch, daß die analytische Fortsetzung zusammen mit der Forderung, daß $\tilde{D}_{\text{ana}}^{(\text{K})}$ (und damit auch $\tilde{D}_{\text{ana}}^{(\text{H})}$) für $k_0 \notin \mathbb{R} \rightarrow \infty$ verschwindet, eindeutig ist [BM60].

Wir betrachten als einfachstes Beispiel den **freien Propagator**. Die Matsubara-Green-Funktion ist gemäß (3.3.5) und (4.4.29)

$$\tilde{\mathfrak{D}}_0(k) = -\frac{1}{(i\omega + \mu)^2 - \vec{k}^2 - m^2} = -\Delta_{\text{ana}}^{(\text{K})}(i\omega_n, \vec{k}). \quad (4.4.36)$$

Also gilt wegen (4.4.35)

$$\tilde{\Delta}_{\text{ana}}^{(\text{K})}(k) = \frac{1}{(k_0 + \mu)^2 - \vec{k}^2 - m^2} \Rightarrow \tilde{\Delta}_{\text{ana}}^{(\text{H})}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (4.4.37)$$

Der freie retardierte Propagator bei endlichem T und μ ist also identisch mit dem im Vakuum:

$$\tilde{\Delta}_{\text{ret}}(k) = \frac{1}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - m^2}. \quad (4.4.38)$$

Entsprechend ist die Spektralfunktion freier skalarer Bosonen

$$A_0^{(H)}(k) = -2\text{Im} \tilde{\Delta}_{\text{ret}}(k) = 2\pi \text{sign}(k^0) \delta(k^2 - m^2). \quad (4.4.39)$$

Dies läßt sich freilich auch unmittelbar aus der Modenentwicklung (3.1.24) unter Verwendung der Kommutatorrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (3.1.26) berechnen. Weiter ist leicht zu zeigen, daß aufgrund von (4.4.31) mit dieser Spektralfunktion tatsächlich (4.4.37) resultiert (*Übung!*). Daß für freie Teilchen der retardierte Propagator bei endlichem β und μ sich nicht von dem im Vakuum unterscheidet, liegt daran, daß für nicht wechselwirkende Quantenfelder die Kommutatoren zwischen Feldoperatoren $\propto \mathbb{1}$ ist. Dies ist freilich für wechselwirkende Teilchen nicht mehr der Fall.

Eine weitere wichtige Folgerung ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen dem exakten und dem freien Propagator, der durch die Dyson-Gleichung (3.3.18) gegeben ist. In unserer jetzigen Bezeichnungweise lautet diese

$$\tilde{\mathcal{D}}(i\omega_n, \vec{k}) = -\frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - \vec{k}^2 - m^2 - \tilde{\Pi}^{(M)}(i\omega_n, \vec{k})}. \quad (4.4.40)$$

Dabei ist $\tilde{\Pi}$ die **Selbsternergie** und störungstheoretisch als die Summe aller einteilchenirreduziblen amputierten Zweipunktfunktionen definiert. Die analytische Green-Funktion ist dann gemäß (4.4.35) durch

$$\tilde{D}_{\text{ana}}^{(H)}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ana}}^{(H)}(k)}, \quad \text{mit} \quad \tilde{\Pi}_{\text{ana}}^{(H)}(k) = \tilde{\Pi}_{\text{ana}}^{(K)}(k^0 - \mu, \vec{k}) \quad (4.4.41)$$

gegeben. $\tilde{\Pi}_{\text{ana}}^{(K)}$ ist dabei die analytische Fortsetzung von $\tilde{\Pi}_{\text{ana}}^{(K)}$. Diese Fortsetzung ist i.a. nicht eindeutig, aber sie ist dadurch bestimmt, daß die retardierte Greensche Funktion durch

$$\tilde{D}_{\text{ret}}^{(H)}(k) = \tilde{D}_{\text{ana}}^{(H)}(k^0 + i0^+, \vec{k}) \quad (4.4.42)$$

gegeben ist, und damit diese Funktion retardiert ist, darf sie nur in der unteren k^0 -Halbebene Singularitäten aufweisen, d.h. es muß

$$\text{sign}(k^0) \text{Im} \tilde{\Pi}_{\text{ret}}^{(H)}(k) = \text{sign}(k^0) \text{Im} \tilde{\Pi}_{\text{ana}}^{(H)}(k^0 + i0^+, \vec{k}) \geq 0 \quad (4.4.43)$$

sein.

4.4.2 Dirac-Fermionen

Die analytische Fortsetzung des Propagators für Dirac-Fermionen erfolgt völlig analog zu dem im vorigen Abschnitt gezeigten Vorgehen. Wir müssen nur die Vorzeichenregeln bei der Vertauschung der fermionischen Feldoperatoren beachten. Die Realzeit-Propagatoren für die großkanonischen Feldoperatoren sind definiert durch

$$iG_{ab}^{(K, \text{ret})}(x) = \Theta(t) \left\langle \left\{ \psi_a^{(K)}(x), \bar{\psi}_b^{(K)}(0) \right\} \right\rangle_{\beta, \mu}, \quad (4.4.44)$$

$$iG_{ab}^{(K)+-}(x) = \left\langle \psi_a^{(K)}(x) \bar{\psi}_b^{(K)}(0) \right\rangle_{\beta, \mu}, \quad (4.4.45)$$

$$iG_{ab}^{(K)-+}(x) = - \left\langle \bar{\psi}_b^{(K)}(0) \psi_a^{(K)}(x) \right\rangle_{\beta, \mu}. \quad (4.4.46)$$

Die Spektralfunktion ist wieder durch

$$A_{ab}^{(K)}(k) = i \left[\tilde{G}_{ab}^{(K)+-}(k) - \tilde{G}_{ab}^{(K)-+}(k) \right] \quad (4.4.47)$$

definiert, und wegen (4.4.44-4.4.46) folgt aus dem Faltungssatz für Fouriertransformierte, daß

$$\tilde{G}_{ab}^{(K, \text{ret})}(k) = \tilde{G}_{ab}^{(K, \text{ana})}(k^0 + i0^+, \vec{k}) \quad (4.4.48)$$

mit der analytischen Fortsetzung der Greenfunktion in die komplexe k^0 -Ebene

$$\tilde{G}_{ab}^{(K, \text{ana})}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{A_{ab}^{(K)}(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0}. \quad (4.4.49)$$

Schreiben wir die Erwartungswerte in den Definitionen (4.4.44-4.4.45) als Spur aus und nutzen die Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur, erhalten wir für $-\beta < \text{Im } t < 0$

$$G_{ab}^{(K)+-}(x) = -G_{ab}(t + i\beta, \vec{x}). \quad (4.4.50)$$

Im Impulsraum bedeutet dies

$$\tilde{G}_{ab}^{(K)+-}(k) = -\tilde{G}_{ab}^{(K)-+}(k) \exp(\beta k^0). \quad (4.4.51)$$

Damit lassen sich die Wightman-Funktionen (4.4.45) und (4.4.46) durch die Spektralfunktion

$$i\tilde{G}_{ab}^{(K)-+}(k) = -f_F(k^0) A_{ab}^{(K)}(k), \quad (4.4.52)$$

$$i\tilde{G}_{ab}^{(K)+-}(k) = [1 - f_F(k^0)] A_{ab}^{(K)}(k) \quad (4.4.53)$$

ausdrücken. Die Matsubara-Green-Funktion ist durch

$$\mathfrak{G}_{ab}(x) = i \left[\Theta(\tau) G_{ab}^{(K)+-}(-i\tau, \vec{x}) + \Theta(-\tau) G_{ab}^{(K)-+}(-i\tau, \vec{x}) \right], \quad \tau \in (-\beta, \beta), \quad (4.4.54)$$

definiert. Sie erfüllt für $-\beta < \tau < 0$ die antiperiodische KMS-Bedingung

$$\mathfrak{G}_{ab}(\tau, \vec{x}) = -\mathfrak{G}_{ab}(\tau + \beta, \vec{x}), \quad (4.4.55)$$

und die Fourierdarstellung bzgl. der imaginären Zeit τ bezieht sich auf die fermionischen Matsubarafrequenzen

$$\bar{\omega}_n = (2n + 1)\pi T. \quad (4.4.56)$$

Die Impulsdarstellung ist also durch

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{ab}(i\bar{\omega}_n, \vec{k}) = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \mathfrak{G}_{ab}(\tau, \vec{x}) \exp(i\bar{\omega}_n \tau - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (4.4.57)$$

gegeben. Verwendet man in dieser Formel (4.4.53) und (4.4.54), folgt wieder der gesuchte Zusammenhang zur analytischen Greenschen Funktion (4.4.49):

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{ab}^{(K)}(k) = -\tilde{G}_{ab}^{(K, \text{ana})}(i\bar{\omega}_n, \vec{k}). \quad (4.4.58)$$

Die retardierte Greenfunktion der Heisenbergoperatoren ergibt sich wie bei den Fermionen als einfache Verschiebung des Energienullpunktes um das chemische Potential:

$$G_{ab}^{(H, \text{ret})}(k) = G_{ab}^{(K, \text{ret})}(k_0 - \mu, \vec{k}). \quad (4.4.59)$$

Mit (4.2.18) erhalten wir für den freien retardierten Propagator

$$G^{(0, \text{ret})}(k) = \frac{\not{k} + m}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - m^2}, \quad (4.4.60)$$

wobei wir wieder von der Spinorindexnotation zur Matrixnotation übergegangen sind. Auch hier stimmt der retardierte Propagator für freie Teilchen bei endlichen Temperaturen und Dichten mit dem Vakuumpropagator überein. Dies folgt daraus, daß für freie Teilchen die Antikommutatoren der fermionischen Feldoperatoren proportional zum Einheitsoperator sind. Dies ist bei wechselwirkenden Teilchen i.a. nicht der Fall.

4.4.3 Der Photonenpropagator

Es ist klar, daß für den Photonenpropagator alle Rechnungen wie für den Fall des Skalarbosons gelten. Da Photonen masselos sind, ist allerdings $\mu = 0$, und wir brauchen keine Unterscheidung zwischen großkanischem und gewöhnlichem Heisenbergbild. Die analytische Fortsetzung der Matsubara-Green-Funktion zur retardierten Green-Funktion erfolgt ansonsten genau wie für Skalarbosonen. Der Photonenpropagator ist insofern komplizierter als er eine **eichabhängige Größe** ist. Dies wirft die Frage auf, ob die lineare Antworttheorie für die Berechnung der konstitutiven Materialgrößen (Permittivität, Permeabilität, Leitfähigkeit etc.) eichinvariante Größen ergibt, wie es für Observablen sein muß. Bevor wir konkret die **Selbstenergie des Photons** in niedrigster Ordnung der Störungstheorie ausrechnen, wollen wir diese Frage ein wenig näher untersuchen, denn dies führt auch auf wichtige Eigenschaften dieser Größe selbst, was die Rechnung wiederum erleichtert. Wir werden im folgenden eher qualitativ als streng analytisch argumentieren. Alle Behauptungen lassen sich aber mit Hilfe der **Pfadintegralmethoden** (s. z.B. [Hee02]) oder mit Hilfe einer detaillierten diagrammatischen Analyse der Störungstheorie auch genauer begründen (s. z.B. [BD65]).

Wie bei den skalaren Bosonen in Abschnitt 3.3 führen wir die **Photonenselbstenergie** als die zusammenhängenden einteilchenirreduziblen mit zwei amputierten äußeren Photonenlinien ein. Wie für skalare Bosonen gilt dann die Dyson-Gleichung (3.3.15-3.3.17), nur daß der freie und der exakte Photonpropagator entsprechend der Vektornatur des Photonenfeldes noch Vierervektorindizes tragen:

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{\rho\sigma}(k) = \tilde{\mathfrak{D}}_{\rho\sigma}^{(0)}(k) - \tilde{\mathfrak{D}}_{\rho\rho'}^{(0)}(k) \tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho'\sigma'}(k) \tilde{\mathfrak{D}}_{\sigma'\sigma}(k). \quad (4.4.61)$$

Das Problem mit dieser *Matrixgleichung* ist, daß wir sie nicht ohne weiteres nach $\tilde{\mathfrak{D}}_{\rho\sigma}(k)$ auflösen können, da der freie Photonpropagator i.a. keine invertierbare Matrix ist. So ist der freie Propagator in Coulombbeichung (4.2.30) offensichtlich nicht invertierbar.

In der Störungsrechnung kommen nun allerdings freie Photonenpropagatoren immer nur durch Kontraktionen zustande, die diagrammatisch entweder mit Photonenfeldern mit einem äußeren Raum-Imaginärzeitpunkt oder mit einem inneren Raum-Imaginärzeit, der zu einem erhaltenen Strom gehört, verknüpft sind. In unserer linearen Antworttheorie wird der äußere Punkt (4.3.68) mit einem **erhaltenen klassischen Viererstrom** kontrahiert. Das bedeutet aber, daß wir sowohl für einen äußeren als

auch einen inneren Raum-Imaginärzeitpunkt beliebige Vierergradientenfelder zum Photonpropagator addieren dürfen, d.h. wir können im Impulsraum den freien Photonpropagator durch

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{\rho\sigma}^{(F)}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \Big|_{k_0=i\omega_{n_k}}, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad (4.4.62)$$

ersetzen. Dabei steht der Index (F) für **Feynman-Eichung**.

Weiter ist bei einem zusammenhängenden Diagramm jeder der beiden äußeren Punkte über einen freien Propagator mit einem Stromoperator verknüpft, über den seinerseits über das Wick-Theorem Kontraktionen gebildet werden. Dies ist auch der Fall, wenn man nur die eiteilchenirreduziblen (1PI) Diagramme berücksichtigt. In der Impulsdarstellung können wir nun die äußeren Beinchen entsprechenden Photonpropagatoren weglassen. Die so amputierten 1PI-Diagramme ergeben nun Beiträge zur Selbstenergie, und für jedes solche Diagramm gilt dann offenbar

$$\partial_\rho \Pi_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(x) = \partial_\sigma \Pi_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(x) = 0 \quad (4.4.63)$$

bzw. im Impulsraum geschrieben

$$k_\rho \tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(k) = k_\sigma \tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(k) = 0. \quad (4.4.64)$$

Außerdem muß die vollständige Photonenselbstenergie entsprechend der Symmetrie der Dysongleichung ein symmetrischer Tensor sein, d.h. es muß

$$\tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(k) = \tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\sigma\rho}(k) \quad (4.4.65)$$

gelten.

Da im Falle der Vakuumtheorie die Lorentzinvarianz gilt, muß $\tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}$ ein symmetrischer Vierertensor zweiter Stufe sein, und dieser kann nur aus $g_{\mu\nu}$ und $k_\mu k_\nu$ aufgebaut sein, da es keinen weiteren Vierertensor geben kann, der nicht irgendein Bezugssystem auszeichnet. Demnach ist der Vakuumanteil von der Form

$$\tilde{\Pi}_{\text{Mat, vac}}^{\rho\sigma} = -\Theta^{\rho\sigma}(k) \tilde{\Pi}_{\text{Mat, vac}}(k) \quad (4.4.66)$$

mit dem kovarianten Projektionsoperator auf zu k transversale Vektoren

$$\Theta^{\rho\sigma}(k) = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}. \quad (4.4.67)$$

Dabei ist in (4.4.66) $\tilde{\Pi}_{\text{Mat, vac}}(k)$ eine skalare Funktion.

Der Mediumanteil hingegen hängt von β und μ ab, und diese Größen beziehen sich auf das Ruhssystem des Wärmebades. Daher hängt dieser Anteil der Photonenselbstenergie auch vom Vierergeschwindigkeitsvektor U^μ des Wärmebades ab. Im Ruhssystem des Wärmebades ist $U^0 = 1$ und $\vec{U} = 0$. Wir rechnen im folgenden ausschließlich in diesem Bezugssystem, schreiben aber die Tensoren in kovarianter Form auf. Es gibt nunmehr offenbar zwei vierertransversale Projektionstensoren, und zwar einen bzgl. U^μ transversalen und einen longitudinalen Anteil. Dazu bilden wir zunächst die zu U_μ transversale Projektion des Photonimpulses

$$k_\perp = k - U(k \cdot U) \quad (4.4.68)$$

und damit den Projektionsoperator

$$P_{\text{T}}^{\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} - U^\rho U^\sigma - \frac{k_\perp^\rho k_\perp^\sigma}{k_\perp^2}, \quad (4.4.69)$$

der sowohl zu k als auch zu U (kovariant) transversal ist:

$$P_{\text{T}}^{\rho\sigma} k_{\perp\sigma} = P_{\text{T}}^{\rho\sigma} U_\sigma = 0. \quad (4.4.70)$$

Der andere davon linear unabhängige zu k transversale Projektor ist

$$P_{\text{L}}^{\rho\sigma} = \Theta^{\rho\sigma} - P_{\text{T}}^{\rho\sigma} = U^\rho U^\sigma + \frac{k_\perp^\rho k_\perp^\sigma}{k_\perp^2} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2}. \quad (4.4.71)$$

Für die Photonenselbstenergie im Medium haben wir also

$$\tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(k) = -\tilde{\Pi}_{\text{Mat, L}}(k \cdot U, |\vec{k}|) P_{\text{L}}^{\rho\sigma}(k) - \tilde{\Pi}_{\text{Mat, T}}(k \cdot U, |\vec{k}|) P_{\text{T}}^{\rho\sigma}(k). \quad (4.4.72)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß das hier betrachtete Plasma im Ruhssystem des Wärmebades isotrop ist, d.h. $\tilde{\Pi}_{\text{Mat, L/T}}$ Skalare unter Drehungen sein müssen. Der Zusammenhang der Selbstenergie zum Photonpropagator ist nun in Feynmanzeichnung genauso gegeben wie für skalare Teilchen, da in dieser Eichung der Photonpropagator eine invertierbare Matrix ist:

$$\tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma} = (\tilde{\mathfrak{D}}_{\text{F}}^{-1})^{\rho\sigma} - (\tilde{\mathfrak{D}}_{\text{F0}}^{-1})^{\rho\sigma}. \quad (4.4.73)$$

Dies können wir wieder nach dem exakten Photonpropagator auflösen und erhalten

$$\tilde{\mathfrak{D}}_{\text{F}}^{\rho\sigma}(k) = \frac{1}{k^2 - \tilde{\Pi}_{\text{Mat, L}}(k)} P_{\text{L}}^{\rho\sigma}(k) + \frac{1}{k^2 - \tilde{\Pi}_{\text{Mat, T}}(k)} P_{\text{T}}^{\rho\sigma}(k) + \frac{1}{k^2} \Lambda^{\rho\sigma}(k). \quad (4.4.74)$$

Dabei ist

$$\Lambda^{\rho\sigma}(k) = \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \quad (4.4.75)$$

der kovariante Projektionsoperator auf zu k parallele Vektoren. Der longitudinale Anteil des Photonpropagators entspricht also einem nicht wechselwirkenden **unphysikalischen** Freiheitsgrad.

Für die Matsubara-Propagatoren durchläuft $k^0 = i\omega_{n_k}$ die bosonischen Matsubara-Frequenzen. Den analytischen und damit insbesondere auch den retardierten Propagator erhalten wir durch die analytische Fortsetzung (4.4.27) des Matsubara-Propagators, d.h. durch

$$\tilde{D}_{\text{F, ana}}(k)^{\rho\sigma} = -\tilde{\mathfrak{D}}_{\text{F}}^{\rho\sigma}(i\omega_{n_k} \rightarrow k^0, \vec{k}). \quad (4.4.76)$$

Im Ruhssystem des Wärmebades ist $U = (1, 0, 0, 0)$, und folglich bestimmen die entsprechenden Selbstenergien $\tilde{\Pi}_{\text{ret, L/T}}$ die Ausbreitung von longitudinalen bzw. transversalen Photonen im ruhenden Medium.

Wir können nun die lineare Antworttheorie für elektromagnetische Felder endgültig ausformulieren. Ausgangspunkt ist (4.3.68). Da wir die Photonenselbstenergie und damit Quantenkorrekturen und

die Mediummodifikationen des Photonpropagators im Impulsraum berechnen, ist es bequemer, zunächst auch die externen Felder in den Viererimpulsraum zu transformieren. Für irgendeine Feldkomponente $f(x)$ gilt dabei in unserer Konvention

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f(x) \exp(ik \cdot x) \Leftrightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) \exp(-ik \cdot x). \quad (4.4.77)$$

Wegen des Faltungssatzes ergibt sich aus (4.3.68) sofort

$$\tilde{A}_\mu = \tilde{D}_{\mu\nu}^{(\text{ret})} \tilde{j}_{\text{ext}}^\nu. \quad (4.4.78)$$

Setzen wir darin die Form (4.4.74) ein, finden wir unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung $k_\mu \tilde{j}_{\text{ext}}^\mu = 0$

$$(\tilde{A}^\mu) = - \left(\begin{array}{c} \frac{\tilde{\rho}_{\text{ext}}}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ret}, L}} \\ \frac{\tilde{j}_{\text{ext}, L}}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ret}, L}} + \frac{\tilde{j}_{\text{ext}, T}}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ret}, T}} \end{array} \right). \quad (4.4.79)$$

Dabei sind

$$\tilde{j}_{\text{ext}, L} = \frac{\vec{k} \cdot \tilde{j}_{\text{ext}}}{k^2} \vec{k}, \quad \tilde{j}_{\text{ext}, T} = \tilde{j}_{\text{ext}} - \tilde{j}_{\text{ext}, L} \quad (4.4.80)$$

der bzgl. \vec{k} longitudinale bzw. transversale Anteil der von außen eingepprägten Stromdichte.

Es ist zuweilen auch bequemer, diese Gleichung statt durch die äußeren Ladungs- und Stromquellen durch die entsprechenden äußeren elektromagnetischen Felder auszudrücken. Die Maxwell-Gleichungen für diese Felder lauten im Impulsraum

$$\vec{k} \times \tilde{\vec{E}}_{\text{ext}} = k_0 \tilde{\vec{B}}_{\text{ext}}, \quad \vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}}_{\text{ext}} = 0, \quad \tilde{\rho}_{\text{ext}} = i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}_{\text{ext}}, \quad \tilde{j}_{\text{ext}} = i\vec{k} \times \tilde{\vec{B}}_{\text{ext}} + ik_0 \tilde{\vec{E}}_{\text{ext}}. \quad (4.4.81)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Gesamtviererpotential (4.4.79) und den eichinvarianten Gesamtfeldstärken lautet

$$\tilde{\vec{E}} = ik_0 \tilde{\vec{A}} - i\vec{k} \tilde{A}_0, \quad \tilde{\vec{B}} = i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}}, \quad (4.4.82)$$

Ersetzen wir die äußeren Quellen $\tilde{j}_{\text{ext}}^\mu$ mittels (4.4.81) und rechnen dann vermöge (4.4.82) die Feldstärken aus, erhalten wir unter Berücksichtigung der Maxwell-Gleichungen (4.4.81)

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}} &= \frac{k^2}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ret}, L}} \tilde{\vec{E}}_{\text{ext}, L} + \frac{k^2}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ret}, T}} \tilde{\vec{E}}_{\text{ext}, T}, \\ \tilde{\vec{B}} &= \frac{k^2}{(k_0 + i0^+)^2 - \vec{k}^2 - \tilde{\Pi}_{\text{ret}, T}} \tilde{\vec{B}}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (4.4.83)$$

4.5 Die Photonenselbstenergie in Einschleifennäherung

Wir berechnen nun die **Photonenselbstenergie** in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie. Das entsprechende Diagramm für die Matsubara-Selbstenergie ist

$$-\tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(k) = k \quad (4.5.1)$$

Die Feynmanregeln aus Abb. 4.2 liefern

$$\tilde{\Pi}_{\text{Mat}}^{\rho\sigma}(k) = e^2 \sum_l \text{tr} [\gamma^\rho \mathfrak{G}_0(l+k) \gamma^\nu \mathfrak{G}_0(l)]. \quad (4.5.2)$$

Dabei haben wir die **Fermionenschleifenregel** beachtet. Diese beinhaltet sowohl eine Spur bzgl. der Dirac-Indizes als auch ein zusätzliches Vorzeichen von der Kontraktion der beiden ganz außen stehenden Elektronfeldoperatoren, die eine Umordnung unter dem Imaginärzeitordnungsoperator erfordern, was das zusätzliche Vorzeichen bewirkt (*Übung!*).

Die Spur im Nenner des lässt sich mit Hilfe der Antikommutatorregeln der Diracmatrizen $\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} = 2g^{\rho\sigma}$ und der Vertauschbarkeit der Matrizen unter der Spur berechnen (*Übung*). Das Resultat lautet

$$N^{\rho\sigma} = \text{tr} [\gamma^\rho (l + \not{k} + m) \gamma^\nu (l + m)] = 4 \{ k^\rho l^\sigma + k^\sigma l^\rho + 2l^\rho l^\sigma + [m^2 - l(l+k)] g_{\rho\sigma} \}. \quad (4.5.3)$$

Als nächstes berechnen wir die Matsubara-Summe. Dazu gehen wir analog wie bei den Bosonen vor, um diese Summe in ein Integral umzuwandeln. Wir verwenden wieder die in Abb. 4.4 gezeigte Kontur. Nur müssen wir diesmal eine Funktion finden, die einfache Pole bei $p_0 = i\bar{\omega}_n$ besitzt. Dies ist offenbar die Funktion

$$f(p_0) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{p_0 \beta}{2} \right). \quad (4.5.4)$$

Wie bei der entsprechenden Rechnung für Bosonen können wir wieder die Antisymmetrie dieser Funktion benutzen, um die Matsubarasumme in der Form

$$T \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(i\bar{\omega}_n) = \int_{\mathcal{C}^+} \frac{dp_0}{2\pi i} [F(p_0) + F(-p_0)] \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\beta p_0}{2} \right) \quad (4.5.5)$$

zu schreiben. Setzen wir dies in (4.5.2) ein, sehen wir, daß erwartungsgemäß dieses Integral divergent ist. Wir erwarten, daß die divergenten Anteile wieder allein vom Vakuumbeitrag zur Matsubarasumme herrührt.

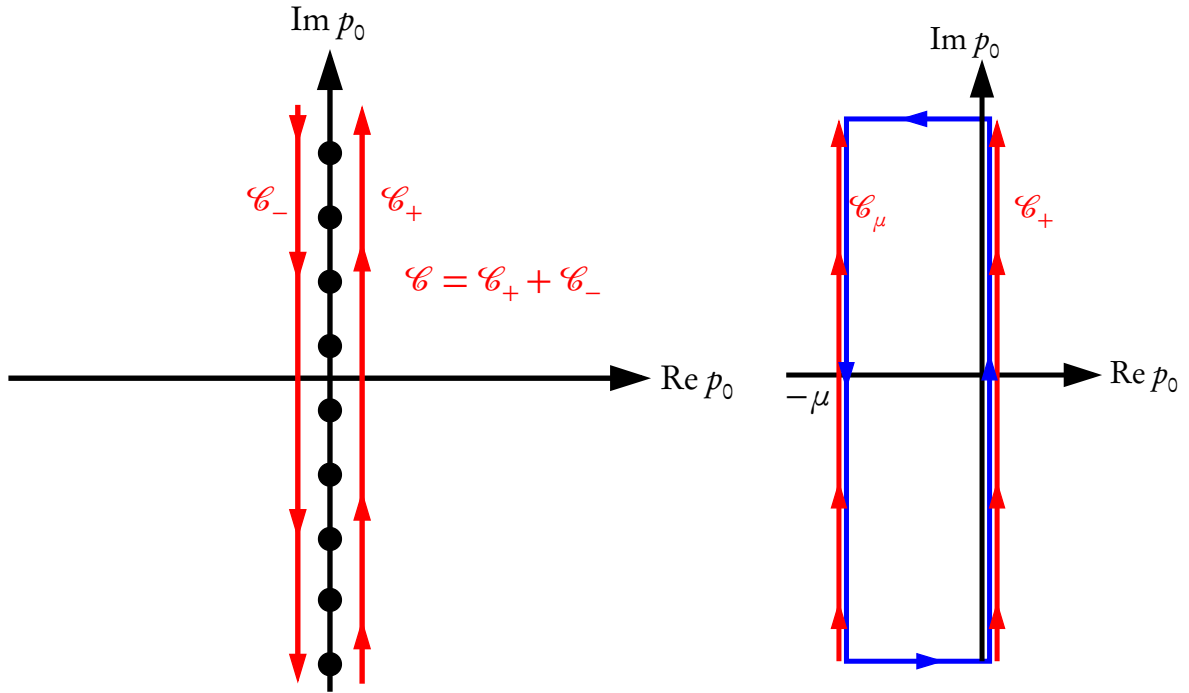


Abbildung 4.4: Konturen zur Berechnung von Summen über fermionische Matsubara-Frequenzen in der komplexen p_0 -Ebene.

Daher wollen wir diesen Vakuumanteil abspalten. Da für Fermionen $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig sein darf und nicht wie bei den Bosonen die Restriktion $|\mu| \leq m$ gilt, müssen wir etwas anders vorgehen. Zunächst gilt

$$\tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right) = 1 - 2f_F(p_0) \quad \text{mit} \quad f_F(p_0) = \frac{1}{\exp(\beta p_0) + 1}. \quad (4.5.6)$$

Der erste Term führt zu einem von T unabhängigen Beitrag zur Matsubarasumme:

$$S_{T=0} = \int_{\mathcal{C}_+} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{2} [F(p_0) + F(-p_0)]. \quad (4.5.7)$$

Da F aus den Feynmanregeln resultiert, besitzt F lediglich entlang der reellen Achse Pole aufgrund der Nenner in den Propagatoren freier Teilchen, so daß F in einer Umgebung entlang der imaginären Achse analytisch ist. Wir können also im zweiten Summanden in (4.5.7) $p'_0 = -p_0$ substituieren und dann statt des daraus resultierenden Integrationsweges \mathcal{C}^- auch \mathcal{C}^+ verwenden. Wir haben also

$$S_{T=0} = \int_{\mathcal{C}_+} \frac{dp_0}{2\pi i} F(p_0). \quad (4.5.8)$$

Die Matsubara-Propagatoren stimmen bis auf das Vorzeichen mit den entsprechenden Vakuum-Propagatoren überein, wobei aber $k_0 = i\bar{\omega}_{n_k} + \mu$ ist. Den Vakuumanteil der Matsubara-Summe erhalten wir also, wenn wir statt \mathcal{C}_+ den Weg \mathcal{C}_μ wählen (vgl. Abb. 4.4). Dies müssen wir freilich wieder korrigieren. Das Korrekturintegral können wir durch im Unendlichen gelegene horizontale Strecken zu einer

geschlossenen Integrationskontur ergänzen, wobei freilich gewährleistet sein muß, daß F im Unendlichen hinreichend schnell abfällt, was in den Anwendungen i.a. der Fall ist. Dies ist auch notwendig, damit die Matsubara-Summe überhaupt existiert. Damit haben wir schließlich

$$S_{T=0} = \int_{\mathcal{C}_\mu} \frac{dp_0}{2\pi i} F(p_0) + \int_{\mathcal{C}_{\text{cold}}} \frac{dp_0}{2\pi i} F(p_0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl_0}{2\pi} F(il_0 - \mu)}_{S_{\text{vac}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_{\text{cold}}} \frac{dp_0}{2\pi i} F(p_0)}_{S_{\text{cold}}}. \quad (4.5.9)$$

Das Integral für S_{vac} ergibt bei der Anwendung auf Feynman-Diagramme offensichtlich ein Integral der euklidischen Vakuum-Theorie, solange alle Zeitkomponenten der äußeren Impulse rein imaginär gewählt werden. Die entsprechende analytische Fortsetzung liefert das Resultat für die Minkowski-Feynman-Diagramme. Die retardierte Vakuum-Green-Funktion ist damit durch den oben besprochenen Zusammenhang mit dieser analytischen Green-Funktion gegeben. Für Vakuum-Greenfunktionen ist auch der zeitgeordnete Propagator durch die analytische Green-Funktion gegeben⁷:

$$\check{D}_{\text{vac}}^{--}(k) = \check{D}_{\text{vac, ana}}[(1 + i0^+)k_0, \vec{k}], \quad (4.5.10)$$

und dieser Propagator wird in den **Vakuum-Feynman-Regeln** berechnet. Für den Vakuumteil der Selbstenergie gilt

$$\check{\Pi}_{\text{vac}}^{--}(k) = \check{\Pi}_{\text{vac, ana}}[(1 + i0^+)k_0, \vec{k}] \quad \text{und} \quad \check{\Pi}_{\text{vac}}^{(\text{ret})}(k) = \check{\Pi}_{\text{vac, ana}}(k_0 + i0^+, \vec{k}). \quad (4.5.11)$$

Weiter ist $\check{\Pi}_{\text{vac, ana}}$ für $k^2 < 0$ entlang der reellen k^0 -Achse analytisch und reell. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip gilt demnach

$$\check{\Pi}_{\text{vac}}^{(\text{ret})}(k) = \Theta(k^0)\check{\Pi}_{\text{vac}}^{--}(k^0, \vec{k}) + \Theta(-k^0)[\check{\Pi}_{\text{vac}}^{--}(k^0, \vec{k})]^*. \quad (4.5.12)$$

Wir können also zur Berechnung des Vakuumanteils der Photonenselbstenergie die Standardformeln der dimensional Regularisierung in Anhang C.1 verwenden, um die für die lineare Antworttheorie benötigte retardierte Greensche Funktion zu berechnen. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, läßt sich mit der dimensional Regularisierung die **Renormierung** der divergenten Ausdrücke systematisch ausführen.

Allgemein enthält S_{vac} die Divergenzen der Vakuum-Feynman-Diagramme, und wir können diese durch die Gegenterme der **Vakuumrenormierungsvorschriften** beseitigen. Die übrigen Beiträge zur Matsubara-Summe

$$S = S_{\text{vac}} + S_{\text{cold}} - \underbrace{\int_{\mathcal{C}_+} \frac{dp_0}{2\pi i} [F(p_0) + F(-p_0)] f_F(p_0)}_{S_{\text{hot}}} \quad (4.5.13)$$

sind endlich.

Dies sehen wir wie folgt: Sowohl S_{cold} als auch S_{hot} können mit dem Residuensatz ausgewertet werden. Die entsprechenden Pole der Integranden sind wieder die auf der reellen Achse gelegenden Singularitäten der Vakuum-Green-Funktionen. Im Falle von S_{cold} treten diese auf, wenn $\mu > m$ ist, und wenn die entsprechenden Polstellen die Bedingung $-\mu < p_0^{(\text{pol})} < 0$ erfüllen. Die zu diesem Schleifenimpuls gehörige räumliche Integration ist dann aber auf ein endliches Gebiet beschränkt, so daß dieser

⁷Dies ist für die T -abhängigen Teile der Green-Funktion nicht der Fall!

Beitrag endlich ist. Für S_{hot} erhalten wir Pole, die der Bedingung $p_0^{(\text{pol})} > 0$ unterworfen sind. Die entsprechenden Integrale über die räumlichen Impulse sind also durch die **Fermiverteilungsfunktionen** exponentiell gedämpft. Da die Zähler in den Feynman-Integranden Polynome sind, sind damit die Integrale konvergent. Weiter verschwindet für $T \rightarrow 0$ dieser Beitrag, da $f_{\text{F}}(p_0)\Theta(p_0) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$ gilt. Für kalte Materie, also $T = 0$ und $\mu > m$ ist also $S = S_{T=0} + S_{\text{cold}}$, und dieser Fall wird durch unseren $T > 0$ -Formalismus gleich mitbehandelt. Es ist klar, daß diese Diskussion des Konvergenzverhaltens der Feynman-Diagramme nur die **UV-Divergenzen**, die für große Schleifenimpulse auftreten, betrifft. Wie wir soeben erläutert haben, werden diese durch dieselben **Gegenterme der Renormierungstheorie** beseitigt wie im Vakuum. Im Gegensatz dazu erfordern ggf. auftretende **IR-Divergenzen** Resummationen unendlich vieler Diagramme. Wir gehen darauf an dieser Stelle nicht näher ein und wenden uns nun der konkreten Berechnung der Photonenselbstenergie in niedrigster Ordnung der Störungstheorie, also dem Einschleifendiagramm 4.5.1 zu.

4.5.1 Der Vakuum-Anteil und Renormierung

Wenden wir uns nun also der Berechnung des Vakuumanteils der Selbstenergie zu. Verwenden wir also das entsprechende Integral aus (4.5.9) in (4.5.2) mit dem Nenner (4.5.3), erhalten wir ein **divergentes Resultat**, denn der Integrand fällt für große Schleifenimpulse nur wie $\mathcal{O}(1/l^2)$ ab. Würden wir nun einen Viererimpulsabschneideparameter einführen müßte sich das Integral aus Dimensionsgründen wie $\propto \Lambda^2$ verhalten. Man nennt solche Diagramme **quadratisch divergent**. Die Hoffnung besteht nun, daß man die Divergenzen durch Renormierung der in der Theorie auftretenden Konstanten beseitigen kann, d.h. man zieht die Divergenzen ab und drückt das Resultat durch die physikalischen endlichen renormierten Parameter aus. In unserem Fall der Photonenselbstenergie hoffen wir, daß wir mit einer **Wellenfunktionsrenormierung für das Photonfeld** auskommen. Um das Integral aber überhaupt ausrechnen zu können, müssen wir es zunächst **regularisieren**, d.h. wir müssen es auf irgendeine Art zu einem endlichen Integral „deformieren“, um die divergenten Anteile zu extrahieren und die entsprechende Gegenterme abziehen zu können, was zur Wellenfunktionsrenormierung des Photons führen sollte. Allerdings ist die Verwendung eines Naiven Viererimpulsabschneideparameters problematisch. Zum einen haben wir es mit einem Tensor zu tun, und es ist nicht klar, wie die einzelnen Komponenten vom Abschneideparameter abhängen sollen. Außerdem werden fundamentale Symmetrien wie die Poincaré-Symmetrie und die Eichinvarianz der QED verletzt. Es ist daher bequemer, die dimensionale Regularisierung zu verwenden, zu der wir Standardformeln in Anhang C.1 bereitgestellt haben. Wir betrachten also die Selbstenergie in beliebigen Raumzeitdimensionen $d = 2\omega = 4 - \epsilon$. Damit die Kopplungskonstante (also die Elektronenladung e) in allen Dimensionen dimensionslos bleibt, führen wir, wie im Anhang erläutert, eine explizite Massenskala μ ein.

Um die Standardformeln benutzen zu können, berechnen wir die **zeitgeordnete Selbstenergiefunktion**

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac}\rho\sigma}^{--}(k) = \tilde{\Pi}_{\text{ana}\rho\sigma}^{--}[(1 + i0^+)k^0, \vec{k}]. \quad (4.5.14)$$

Wie Abb. 4.5 zeigt, können wir dann die Integrationskontur entlang der imaginären Achse in (4.5.9) in eine Integration entlang der reellen Achse deformieren. In der Vakuumtheorie geht man i.a. umgekehrt vor. Da liegen die Feynmanregeln zunächst im Minkowskiraum vor und aufgrund der in der Abbildung gezeigten Polstruktur geht man umgekehrt von der Integration entlang der reellen Achse zu einer Integration entlang der imaginären Achse über. Dies bezeichnet man als **Wick-Rotation**. Für raumartige äußere Impulse, also $k^2 < 0$ hat man es dann mit einem Integral in der **euklidischen Feldtheorie** zu tun, wo die Integrale nach der dimensional Regularisierung wohldefiniert und analytisch sind. Die Formeln in Anhang C.1 ergeben sich dann durch analytische Fortsetzung dieser Selbstenergie

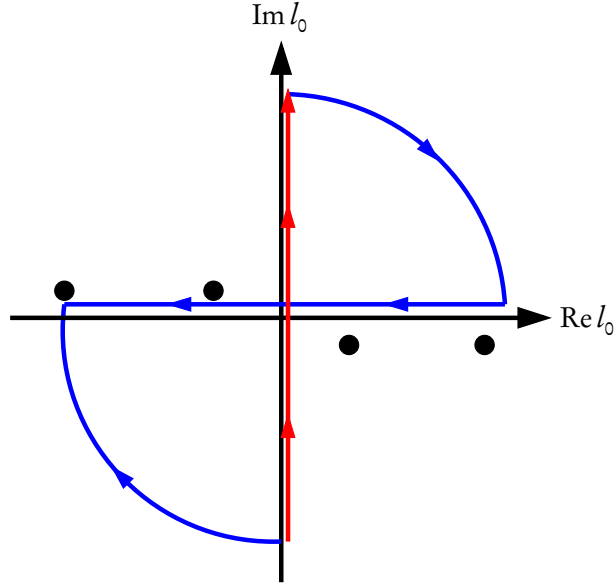


Abbildung 4.5: Zur Wick-Rotation: Aufgrund Lage der Pole aufgrund für die zeitgeordnete Selbstenergie gemäß (4.5.14) verschwindet das Integral entlang des durch die blaue Kontur und die ursprüngliche rote Kontur entlang der imaginären Achse nach dem Residuensatz. Die beiden Viertelkreise hat man sich wieder ins Unendliche verschoben zu denken, und daher tragen diese nichts zum Integral bei. Das bedeutet aber, daß wir statt entlang der imaginären auch entlang der reellen Achse integrieren dürfen, und dies liefert dann das Integral (4.5.15) im Minkowski-Raum.

der euklidischen Theorie zu zeitartigen äußeren Impulsen. Wir haben also in unserem Fall das Integral

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac}\rho\sigma}^{--}(k) = -4ie^2 \int_{\mathbb{R}^{2\omega}} \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \mu^{2\epsilon} \frac{[m^2 - l(l+k)]g_{\rho\sigma} + k_\mu l_\nu + k_\nu l_\mu + 2l_\mu l_\nu}{[(l+k)^2 - m^2 + i0^+](l^2 - m^2 + i0^+)} \quad (4.5.15)$$

zu berechnen. Dazu verwenden wir die Standardformeln (C.3.1) der dimensional Regularisierung. Wir wollen dabei nicht die Transversalität der Selbstenergie voraussetzen und nur die Spur des Tensors ausrechnen, sondern die volle Tensorstruktur beibehalten, um die Transversalität explizit zu überprüfen. In der Tat erhalten wir

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac}\rho\sigma}^{--}(k) = -4e^2 \left[(m^2 L_1 - k^2 L_2 - k^2 L_3 - (2 - 2\epsilon)L_{32})g_{\rho\sigma} + 2k_\mu k_\nu (L_2 + L_{31}) \right]. \quad (4.5.16)$$

Dabei haben wir beachtet, daß die kovariante Spur $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d = 4 - 2\epsilon$ ist. In der Tat ergibt die explizite Auswertung der betrachteten Funktionen, daß

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac}\rho\sigma}^{--}(k) = -\tilde{\Pi}_{\text{vac}}^{(\text{ana})}[(1 + i0^+)k^0, \vec{k}]\Theta_{\rho\sigma}(k) \quad (4.5.17)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\text{vac}}^{(\text{ana})}(k) = & -\frac{e^2 k^2}{12\pi^2 \epsilon} + \frac{e^2}{36\pi^2} \left\{ \left[3\gamma - 5 + 3 \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] k^2 \right. \\ & \left. - 12m^2 - 3\sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}} (k^2 + 2m^2) \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2 - k^2} - \sqrt{-k^2}}{\sqrt{4m^2 - k^2} + \sqrt{-k^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

Wir bemerken, daß sich die im physikalischen Limes $d = 4$, also $\epsilon \rightarrow 0$ entstehende Divergenz sich tatsächlich durch einen Gegenterm der gewünschten Art beseitigen läßt.

Die **physikalische Renormierungsbedingung** ergibt sich daraus, daß der Photonenpropagator bei $k^2 = 0$ einen Pol mit Residuum 1 wie der freie Propagator besitzen sollte. Dazu entwickeln wir (4.5.18) für kleine k^2 :

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac}}^{(\text{ana})}(k) \underset{k^2 \rightarrow 0}{\cong} -\frac{e^2 k^2}{12\pi^2} \left[-\frac{1}{\epsilon} + \gamma + \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] + \mathcal{O}[(k^2)^2]. \quad (4.5.19)$$

Ziehen wir also diesen führenden Ausdruck ab, erhalten wir die **renormierte Vakuumselbstenergie des Photons zu**

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac, ren}}^{(\text{ana})}(k) = -\frac{e^2}{36\pi^2} \left[5k^2 - 12m^2 - 3\sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}}(s + 2m^2) \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2 - k^2} - \sqrt{-k^2}}{\sqrt{4m^2 - k^2} + \sqrt{-k^2}} \right) \right]. \quad (4.5.20)$$

Um dieses Resultat physikalisch zu interpretieren betrachten wir die „lineare Antwort“ des Vakuums auf eine statische Punktladung. Wir setzen also

$$j_{\text{ext}}^0(x) = Q\delta^{(3)}(\vec{x}), \quad \vec{j}_{\text{ext}} = 0. \quad (4.5.21)$$

Im Impulsraum ist dann

$$\tilde{j}_{\text{ext}}^0(k) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x j_{\text{ext}}^0(x) = 2\pi Q\delta(k^0), \quad \vec{\tilde{j}}_{\text{ext}}(k) = 0. \quad (4.5.22)$$

Hier bietet es sich an, zunächst das Viererpotential gemäß (4.4.79) zu berechnen. Demnach ist

$$\tilde{A}^0(k) = 2\pi Q \frac{\delta(k^0)}{\vec{k}^2 + 0^+ + \tilde{\Pi}_{\text{vac, ren}}^{(\text{ret})}(k_0 = 0, \vec{k})}. \quad (4.5.23)$$

Dies können wir wieder nach Potenzen der Kopplungskonstanten entwickeln. Da die Photonenselbstenergie von der Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ ist, gilt

$$\tilde{A}^0(k) = \frac{2\pi Q\delta(k^0)}{\vec{k}^2 + 0^+} \left[1 - \frac{\tilde{\Pi}_{\text{vac, ren}}^{(\text{ana})}(i0^+, \vec{k})}{\vec{k}^2 + 0^+} + \mathcal{O}(e^4) \right]. \quad (4.5.24)$$

Im folgenden setzen wir der Bequemlichkeit halber

$$\tilde{\Pi}_{\text{vac, ren}}^{(\text{ana})}(k) = k^2 \tilde{\pi}(k^2). \quad (4.5.25)$$

Setzen wir weiter $K = |\vec{k}|$ und $X = |\vec{x}|$, ergibt die Winkelintegration in Kugelkoordinaten mit der Polarachse in Richtung von \vec{x}

$$A^0(x) = \frac{Q}{4\pi^2 iX} \int_{-\infty}^{\infty} dK \frac{K}{K^2 + 0^+} \exp(iKX) [1 + \tilde{\pi}(-K^2)]. \quad (4.5.26)$$

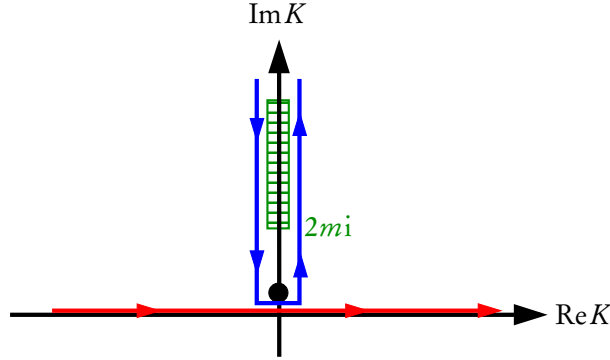


Abbildung 4.6: Zur Berechnung des Integrals 4.5.26: Der Integrand weist in der oberen Halbebene einen Pol bei $K = i0^+$ sowie einen Schnitt entlang der imaginären Achse bei $i[2m, \infty)$ auf. Der ursprüngliche Integrationsweg entlang der reellen Achse (rot) kann offensichtlich zu dem blauen Umlauf um die imaginäre Achse ersetzt werden.

In führender Ordnung, also bei Vernachlässigung der in der Selbstenergie berücksichtigten Quantenfluktuationen, müssen wir das **Coulomb-Potential** erhalten. Dies bestätigt man auch sofort mit Hilfe des Residuensatzes, wobei wir die Integrationskontur in der K -Halbebene schließen müssen, damit der Beitrag des großen Halbkreises aufgrund der Exponentialfunktion nichts zum Integral beiträgt:

$$A_{\text{cl}}^0(x) = \frac{Q}{4\pi X}. \quad (4.5.27)$$

Für die Berechnung des Korrekturterms [Ueh35] bemerken wir, daß $\tilde{\pi}(k^2)$ eine in der ganzen k^2 -Ebene analytische Funktion ist außer entlang der reellen Achse für $k^2 > 4m^2$, wo diese Funktionen einen Schnitt aufweist. Für reelle $k^2 < 4m^2$ ist die Funktion reell, und daher weist nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip $\tilde{\pi}(k^2)$ entlang des Schnitts einen Sprung im Imaginärteil auf. Dies impliziert die in Abb. 4.6 gezeigte analytische Struktur des Integranden von (4.5.26).

Für den Korrekturterm der Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ in (4.5.26), ergibt sich nach der Umdeformation des Integrationsweges

$$A_0^{(2)} = \frac{Q}{4\Pi^2 iX} \int_{\mathcal{C}} dK \frac{\tilde{\pi}(-K^2)}{K}. \quad (4.5.28)$$

Dabei trägt nur der Anteil vom Schnitt der Funktion $\tilde{\pi}(-K^2)$ entlang der imaginären Achse bei $i[2m, \infty)$ zum Integral bei, da aufgrund unserer Renormierungsvorschrift $\tilde{\pi}(-K^2) \propto K^2$ für $K \rightarrow 0$. Wir können also den Integrationsweg durch $K = ix \pm 0^+$ parametrisieren. Da weiter

$$\tilde{\pi}[(x - i0^+)^2] - \tilde{\pi}[(x + i0^+)^2] = 2i im \tilde{\pi}[(x - i0^+)^2] = \frac{\alpha \sqrt{x^2 - 4m^2}}{3x^3} (x^2 + 2m^2) \quad \text{für } x > 2m \quad (4.5.29)$$

ist, wie man (4.5.20) unter Berücksichtigung von (4.5.25) entnimmt, folgt

$$A_0^{(2)} = \frac{Q\alpha}{6\pi^2 X} \int_{2m}^{\infty} dx \frac{\sqrt{x^2 - 4m^2}}{x^4} (x^2 + 2m^2) \exp(-xx). \quad (4.5.30)$$

Substituieren wir schließlich $x = 2m + \epsilon^2$, erhalten wir

$$A_0^{(2)} = \frac{Q\alpha}{3\pi^2 X} \exp(-2mX) \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^2 \sqrt{4m + \epsilon^2}}{(\epsilon^2 + 2m)^4} [(2m + \epsilon^2)^2 + 2m^2] \exp(-\epsilon^2 X). \quad (4.5.31)$$

Wir werten dieses Integral zunächst für $X \gg 1/m$ aus. Dann können wir eine asymptotische Entwicklung vornehmen, weil dann vornehmlich der Integrationsbereich bei $\epsilon \simeq 0$ beiträgt. Wir können daher den Faktor vor der Exponentialfunktion im Integranden nach Potenzen von ϵ^2 entwickeln:

$$\begin{aligned} A_0^{(2)} &= \frac{Q\alpha}{3\pi^2 X} \exp(-2mX) \int_0^\infty \epsilon^2 \exp(-\epsilon^2 X) \left[\frac{3}{4m^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{m^{5/2}}\right) \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi X} \frac{\alpha \exp(-2mX)}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{(mX)^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(mX)^{5/2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

Insgesamt ist also

$$A_0 = \frac{Q}{4\pi X} \left\{ 1 + \frac{\alpha \exp(-2mX)}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{(mX)^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(mX)^{5/2}}\right) \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \right\}. \quad (4.5.33)$$

Dies zeigt, daß für kleine Abstände $X \lesssim 1/(2m)$ die **effektive Ladung** zunimmt. Dies bedeutet, daß sich das Vakuum aufgrund der Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Feldes, welche gemäß unserem Feynmandiagramm in niedrigster Ordnung durch die Erzeugung und Vernichtung von **virtuellen Elektron-Positronpaaren** hervorgerufen werden, wie ein polarisierbares Medium verhält, das die Ladung bei großen Abständen abschirmt.

4.5.2 Der Medium-Anteil

4.6 Physikalische Anwendungen

Anhang A

Das Noether-Theorem für klassische Feldtheorien

A.1 Poincaré-Symmetrie

In diesem Anhang stellen wir den Zusammenhang zwischen **Symmetrien der Wirkung und Erhaltungssätzen** her. Wie wir nämlich sogleich sehen werden, zieht jede kontinuierliche Symmetrie des Wirkungsfunktionals einen Erhaltungssatz nach sich und gestattet die Definition so wichtiger Größen wie Impuls, Energie und Drehimpuls vermöge der **Poincaréinvarianz** der relativistischen Dynamik. Zunächst bemerken wir, daß ein Erhaltungssatz in der relativistischen Feldtheorie durch die **Kontinuitätsgleichung** für eine Viererstromdichte

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \Rightarrow \partial_t j^0 = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (\text{A.1.1})$$

gegeben ist. Integrieren wir nämlich diese Gleichung über den ganzen Raum, finden wir unter der Voraussetzung, daß die Komponenten des Viererstroms im räumlich Unendlichen hinreichend schnell abfallen

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} j^0(t, \vec{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x}) = - \int_{\partial \mathbb{R}^3} d^2 \vec{S}(\vec{x}) \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0, \quad (\text{A.1.2})$$

d.h. die zu dem Viererstrom gehörige Gesamtladung

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} j^0(t, \vec{x}) = \text{const.} \quad (\text{A.1.3})$$

d.h. Q ist eine **Erhaltungsgröße**.

Wir betrachten eine beliebige relativistisch kovariante Feldtheorie mit i.a. mehrkomponentigen Feldern ψ_j . Diese können Skalar- oder Spinor- bzw. Tensorfelder beliebiger Stufe sein. Wir gehen lediglich davon aus, daß wir ein **Poincaré-invariantes Wirkungsfunktional** aus diesen Feldern konstruieren können. Betrachten wir also eine „infinitesimale“ Symmetrietransformation der Raumzeitkoordinaten und Felder von der Form

$$x'^\mu = x^\mu + \delta \eta^a t_a^\mu(x), \quad \psi'_j(x') = \psi_j(x) + \delta \eta^a T_{aj}[\psi(x)]. \quad (\text{A.1.4})$$

Dabei sind die $\delta \eta^a$ irgendwelche infinitesimale voneinander unabhängige Parameter, die die Transformation parametrisieren (z.B. Winkelkoordinaten bei Rotationen und dgl.). Zur Berechnung der Variation der Wirkung benötigen wir zunächst die Variation der Ableitung der Felder, die *nicht* wie beim

Hamiltonschen Prinzip mit dem Ableitungsoperator vertauscht, da nun ja die Raumzeit-Koordinaten selbst mitvariiert werden. Es gilt

$$\delta(\partial_\nu \psi_j) = \partial'_\nu \psi'_j(x') - \partial_\nu \psi_j(x) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \partial_\rho \psi'_j(x') - \partial_\nu \psi_j(x). \quad (\text{A.1.5})$$

Nun ist bis auf Größen von der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\eta^2)$

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\rho_\nu - \delta\eta^a \partial_\nu t_a^\rho, \quad (\text{A.1.6})$$

wovon man sich leicht dadurch überzeugt, daß dieser Ausdruck bis auf Größen der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\eta^2)$ die Identität

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \delta^\rho_\sigma \quad (\text{A.1.7})$$

erfüllt. Verwenden wir also (A.1.4) und (A.1.6) in (A.1.5), finden wir schließlich

$$\delta(\partial_\nu \psi_j^\mu) = \delta\eta^a \{ \partial_\nu T_{aj}[\psi] - [\partial_\nu t_a^\rho(x)](\partial_\rho \psi_j) \}. \quad (\text{A.1.8})$$

Wir benötigen nun noch die Variation des Vierervolumenelements

$$\delta d^4x = d^4x' - d^4x = \left[\det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) - 1 \right] d^4x. \quad (\text{A.1.9})$$

Dazu denken wir uns die Determinante in Form der Matrixelemente hingeschrieben. Es ist klar, daß bis auf Größen der Ordnung $\mathcal{O}(\delta\eta^2)$ nur das Produkt der Diagonalelemente beiträgt. Es folgt schließlich

$$\delta d^4x' = \delta\eta^a \partial_\mu t_a^\mu d^4x. \quad (\text{A.1.10})$$

Unter Verwendung von (A.1.6, A.1.8 und A.1.10) finden wir schließlich nach einigen elementaren Umformungen und partiellen Integrationen, wobei wir annehmen, daß der Integrand für $x \rightarrow \infty$ hinreichend schnell verschwindet, für die Variation der Wirkung

$$\delta S = \int d^4x \delta\eta^a \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_j} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_j)} \right] T_{aj} + \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_j)} \partial_\mu \psi_j - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right] t_a^\mu \right\}. \quad (\text{A.1.11})$$

Da die $\delta\eta^a$ voraussetzungsgemäß voneinander unabhängig sind, muß das Integral für jedes a verschwinden, wenn eine Symmetrie vorliegen soll, und zwar unabhängig vom Feld ψ_j , und das bedeutet, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer als Viererdivergenz eines Stromes j_a^σ zu schreiben sein muß:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_j} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_j)} \right] T_a^\mu + \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_j)} \partial_\mu \psi_j - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right] t_a^\mu = \partial_\sigma j_a^\sigma. \quad (\text{A.1.12})$$

Führen wir die **Variationsableitung** der Wirkung vermöge

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_j} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_j} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_j)} \quad (\text{A.1.13})$$

ein, sehen wir, daß nach Ausführung der Ableitung ∂_ν (A.1.12) in der Form

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} (T_a^\mu - t_a^\mu) = \partial_\nu j_a^\nu \quad (\text{A.1.14})$$

geschrieben werden kann.

Da sich nun weiter die Feldgleichungen gerade aus der Stationarität des Wirkungsfunktionals unter Variation der ψ_j ergeben, d.h. dem Verschwinden der Variationsableitung (A.1.13), folgt sofort, daß **für Lösungen der Feldgleichungen**

$$\partial_\nu j_a^\nu = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

gilt. Dies ist der Inhalt von **Noethers Theorem** [Noe18]:

Zu jeder Einparameteruntergruppe einer Liegruppendarstellung auf den Feldern und Raumzeitkoordinaten, bzgl. der die Wirkung invariant bleibt, existiert ein erhaltener Strom.

Betrachten wir als einfachsten Fall die Translationen von Raum und Zeit. Es ist

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu - \delta \eta^\mu \Rightarrow t_a^\mu(x) = -\delta_a^\mu = \text{const}, \\ \psi_j(x') &= \psi_j(x) \Rightarrow T_a^\mu = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

Verwenden wir also (A.1.13), ergeben die Noetherströme den **kanonischen Energie-Impulstensor**¹

$$\Theta^{a\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_j)} \partial^a \psi_j - \mathcal{L} g^{a\nu}. \quad (\text{A.1.17})$$

Da zu $\mu = 0$ die Zeittranslationen gehören, ist also

$$\Theta^{0\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_j)} \partial^0 \psi_j - \mathcal{L} \delta^{0\nu} \quad (\text{A.1.18})$$

der Viererenergiestromdichtevektor, und die erhaltene Größe ist

$$H = \int d^3x \Theta^{00} = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_j)} \partial^0 \psi_j - \mathcal{L} \right] \quad (\text{A.1.19})$$

die **Gesamtenergie des Feldes** (gemessen in dem gerade betrachteten Inertialsystem). Entsprechend sind die räumlichen Komponenten des **Impulses des Feldes**

$$p^i = \int d^3x \Theta^{i0} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi_j)} \partial^0 \psi_j. \quad (\text{A.1.20})$$

A.2 Globale Eichsymmetrie

Statt einer Diskussion der Folgerungen des Noether-Theorems aus der Lorentzinvarianz der Gleichungen, die genau analog zur eben durchgeführten Analyse der Translationssymmetrie verläuft, betrachten wir noch den einfachsten Fall einer **globalen Eichtransformation**. Es sei z.B. ϕ ein komplexes Skalarfeld. Dann sind die Lagrangedichten invariant unter einer Umdefinition der Phase

$$x' = x, \quad \phi'(x) = \exp(i\alpha)\phi(x), \quad \phi'^*(x) = \exp(-i\alpha)\phi(x). \quad (\text{A.2.1})$$

¹Wir weichen hier ausnahmsweise von der üblichen Konvention, wonach Vierertensorkomponentenindizes durch griechische Buchstaben bezeichnet werden, um weiterhin die Noetherströme mit a durchzunummerieren, während die Komponenten jedes Noetherstroms mit griechischen Indizes ν bezeichnet werden.

Die infinitesimale Transformation erhalten wir offenbar, indem wir in (A.1.4)

$$\delta\eta = \delta\alpha, \quad t^\mu(x) = 0, \quad T[\phi] = i\phi, \quad T[\phi^*] = -i\phi^* \quad (\text{A.2.2})$$

setzen. Betrachten wir ein freies **Klein-Gordon-Feld**, dessen Lagrangedichte durch

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad (\text{A.2.3})$$

gegeben ist, finden wir durch Einsetzen in (A.1.12)

$$\partial_\mu j^\mu = i(\phi^* \overleftrightarrow{\square} \phi). \quad (\text{A.2.4})$$

Wie man leicht nachrechnet, ergibt sich dieser Ausdruck aus dem Strom

$$j_\mu = i(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi). \quad (\text{A.2.5})$$

Daß dieser Strom für die Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\square\phi = -m^2\phi, \quad \square\phi^* = -m^2\phi^* \quad (\text{A.2.6})$$

erhalten ist, verifiziert man unmittelbar durch Einsetzen dieser Gleichungen in (A.2.5).

Anhang B

Integrale und Reihen

In diesem Kapitel berechnen wir einige Integrale und Reihen, die im Zusammenhang mit der thermischen Quantenfeldtheorie immer wieder nützlich sind.

B.1 Integrale zu masselosen idealen Gasen

Wir berechnen zunächst das großkanonische Potential für ein ideales Gas aus masselosen Bosonen. Dabei muß notwendig $\mu = 0$ sein, so daß wir uns mit einem Bosegas aus strikt neutralen Teilchen beschränken können. Wir haben also das Integral (2.4.9) für $m = 0$, also

$$\Phi(\beta, V) = \frac{\beta V}{6\pi^2} \int_0^\infty dE E^3 f_B(E), \quad (\text{B.1.1})$$

zu berechnen. Wir können in diesem Fall offenbar die Bose-Verteilung in eine geometrische Reihe entwickeln und dann gliedweise integrieren. Zunächst gilt

$$f_B(E) = \frac{1}{\exp(\beta E) - 1} = \frac{\exp(-\beta E)}{1 - \exp(-\beta E)} = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\beta E j). \quad (\text{B.1.2})$$

Zur Berechnung der benötigten Integrale definieren wir die erzeugende Funktion

$$F(z) = \int_0^\infty dx \exp(-zx) = \frac{1}{z}. \quad (\text{B.1.3})$$

Daraus folgt durch Differenzieren unter dem Integral

$$\int_0^\infty dx x^n \exp(-zx) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} F(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}. \quad (\text{B.1.4})$$

Setzen wir also die Reihenentwicklung (B.1.2) in (B.1.1) ein, ergibt die gliedweise Integration

$$\Phi(\beta V) = \frac{V}{\pi^2 \beta^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{V}{2\pi^2 \beta^3} \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{j^4}. \quad (\text{B.1.5})$$

Es verbleibt also, die Summe auszurechnen. Dazu verwenden wir eine Methode, die wir später in ähnlicher Form bei störungstheoretischen Berechnungen in der thermischen Feldtheorie noch sehr oft benötigen werden. Die Idee ist, die Summe mit Hilfe des Residuensatzes durch ein Integral auszudrücken.

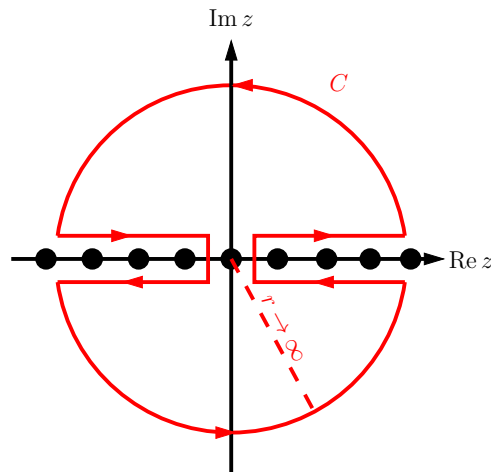


Abbildung B.1: Integrationsweg zur Berechnung der Reihe (B.1.5).

Dazu benötigen wir zunächst eine Funktion, die bei $j \in \mathbb{N}$ Pole erster Ordnung mit Residuum 1 besitzt. Das ist offenbar für

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\text{B.1.6})$$

der Fall. Diese Funktion besitzt in $z = j \in \mathbb{Z}$ wegen

$$f(z) \underset{z \rightarrow j}{\cong} \pi \frac{1 + \mathcal{O}[(z-j)^2]}{\pi(z-j) + \mathcal{O}(z^3)} = \frac{1}{z-j} + \mathcal{O}[(z-j)] \quad (\text{B.1.7})$$

jeweils einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1. Sonst ist die Funktion in der ganzen z -Ebene analytisch. Wir können also die Reihe in (B.1.5) durch Integration entlang des in Abb. B.1 Integrationsweges auswerten:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{j^4} = \frac{i}{2\pi} \int_C dz \frac{1}{z^4} \pi \cot(\pi z). \quad (\text{B.1.8})$$

Offenbar verschwindet nämlich der Beitrag des Integrals über die Kreisbögen, weil der Integrand für $z \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abfällt. Es bleiben also nur die Integrale in der Nähe der reellen Achse übrig. Diese entsprechen wegen (B.1.7) und wegen des Residuensatzes gerade unserer Reihe, wobei wir berücksichtigen müssen, daß die Pole in mathematisch negativer Richtung durchlaufen werden und der Residuensatz folglich einen Faktor $-2\pi i$ beinhaltet. Andererseits können wir den Integrationsweg auch als Umlauf um den Pol bei $z = 0$ in mathematisch positiver Richtung interpretieren, und wir benötigen folglich lediglich das Residuum des Integranden bei $z = 0$. Dieses ist offenbar durch

$$\text{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\cot \pi z}{z^4} = \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^4}{dz^4} [z \cot(\pi z)] = -\frac{\pi^3}{45} \quad (\text{B.1.9})$$

gegeben. Zusammen mit dem Faktor $2\pi i$ vom Residuensatz liefert also (B.1.8) das Resultat

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{j^4} = \frac{i}{2} \int_C dz \frac{1}{z^4} \cot(\pi z) = \frac{\pi^4}{45}. \quad (\text{B.1.10})$$

B.1 · Integrale zu masselosen idealen Gasen

Damit erhalten wir schließlich aus (B.1.5)

$$\Phi(\beta, V) = \frac{\pi^2 V}{90 \beta^3}. \quad (\text{B.1.11})$$

Anhang C

Dimensionale Regularisierung

In diesem Anhang stellen wir kurz einige Formeln zur dimensionalen Regularisierung von Vakuum-Feynman-Diagrammen zusammen. Ausführliche Darstellungen finden sich in [tV72, Lei75, Ram89, Hee02]. Für die im folgenden benötigten analytischen Eigenschaften der Γ -Funktion vgl. [CH10].

Die Grundidee dieser Regularisierungstechnik besteht darin, die für die physikalische Raumzeitdimension $d = 4$ bei hohen Impulsen (UV-)divergenten Integrale bei einer Raumzeitdimension $d = 4 - 2\epsilon < 4$ auszuwerten, wo sie konvergent sind, das Resultat zu reellen Raumzeitdimensionen analytisch fortzusetzen und eine Laurent-Entwicklung in d um $d = 4$ vorzunehmen. Die divergenten Anteile der Diagramme sind dann durch die negativen Potenzen in ϵ separiert und können abgezogen werden. Dieses **Minimal Subtraction Scheme** hat zugleich den Vorteil, daß die Subtraktionen unabhängig von in der Theorie vorkommenden Massenskalen erfolgt, so daß die Methode auch für den Fall spontaner Symmetriebrechung anwendbar wird, bei der die Nambu-Goldstone-Moden masselos werden und ein von Massenskalen abhängiger Subtraktionspunkt zusätzliche Infrarotdivergenzprobleme bewirken würde. Die dimensionale Regularisierung eignet sich deshalb besonders gut, um divergente Integrale der Störungsrechnung in relativistischen Quantenfeldtheorien zu regularisieren, weil sie die meisten Symmetrien respektiert, insbesondere die **Poincaré-Symmetrie** und sowohl viele globale als auch lokale **Eichsymmetrien**. Eine wichtige Ausnahme stellen Realisierungen der **chiralen Symmetrie** dar, in denen mit der physikalischen Raumzeit-Dimension verknüpfte Größen auftreten

Ein Nachteil der dimensionalen Regularisierung ist, daß die notwendig bei jedem Renormierungsverfahren auftretende Energie-Impuls-Skala nur eine indirekte physikalische Bedeutung besitzt. Sie kommt bei der dimensionalen Regularisierung dadurch ins Spiel, daß die Kopplungskonstanten mit einem Faktor μ^ϵ zu skalieren sind, so daß sie unabhängig von d stets dieselbe Energie-Impuls-Dimension behalten.

C.1 Die Grundformeln zur dimensionalen Regularisierung

Wir werten im folgenden einige Einschleifenzweipunktfunktionen aus, die sich für die praktische Anwendung als nützlich erweisen. Es ist wichtig zu bemerken, daß die Integration zunächst im raumartigen Bereich erfolgen muß, wo die Integrale reell zu definieren sind und keine Singularitäten aufweisen. Die analytische Fortsetzung erfolgt dann auf das die Hauptwerte der auftretenden Logarithmen und Wurzeln definierende Riemann-Blatt, wo diese Funktionen für positive reelle Argumente reell sind. Die Dimension der Raumzeit bezeichnen wir mit

$$d = 2\omega = 4 - 2\epsilon \tag{C.1.1}$$

und fassen diese im Sinne einer analytischen Fortsetzung der Feynman-Integrale als reellen Parameter auf.

C.1.1 Standard-Feynman-Integrale

Im folgenden verwenden die Standard-Feynman-Integrale, die zunächst nach einer Wickrotation in Euklidischer Feldtheorie berechnet und sodann analytisch fortgesetzt wurden [Ram89, Hee02]:

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(m^2 - p^2 - 2pq - i0^+)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.1.2})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_\mu}{(m^2 - p^2 - 2pq - i0^+)^\alpha} = -\frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{q_\mu}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (\text{C.1.3})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_\mu p_\nu}{(m^2 - p^2 - 2pq - i0^+)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}} \times \left[q_\mu q_\nu \Gamma(\alpha - \omega) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (q^2 + m^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1) \right], \quad (\text{C.1.4})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p^2}{(m^2 - p^2 - 2pq - i\eta)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - \omega}} \times [q^2 \Gamma(\alpha - \omega) - \omega (q^2 + m^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)], \quad (\text{C.1.5})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^2}{(M^2 - l^2 - i0^+)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \omega(\omega + 1) \frac{\Gamma(\alpha - 2 - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha - 2 - \omega}}, \quad (\text{C.1.6})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma}{(M^2 - l^2 + i0^+)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - 2 - \omega)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(M^2)^{\alpha - 2 - \omega}} \times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{C.1.7})$$

$$\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{C.1.8})$$

C.1.2 Laurententwicklung der Γ -Funktion

Die Laurententwicklung der Γ -Funktion um die Pole $x_n = -n$ für $n \in \mathbb{N}$ lautet [Hee02, CH10]

$$\forall n \in \mathbb{N}: \Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n + 1) + O(\epsilon) \right] \quad (\text{C.1.9})$$

mit

$$\Psi_1(1) = -\gamma, \quad \forall n \geq 1: \Psi_1(n + 1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (\text{C.1.10})$$

Dabei ist $\gamma = 0.577\dots$ die Euler-Mascheronische Konstante.

C.1.3 Feynmans Parametrisierung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (\text{C.1.11})$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3} \quad (\text{C.1.12})$$

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^m b_k^{\alpha_k}} = \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^m \alpha_k)}{\prod_{k=1}^m \Gamma(\alpha_k)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{m-2}} dx_{m-1} \times \quad (\text{C.1.13})$$

$$\times \frac{x_{m-1}^{\alpha_1-1} (x_{m-2} - x_{m-1})^{\alpha_2-1} \cdots (1-x_1)^{\alpha_m-1}}{[b_1 x_{m-1} + b_2 (x_{m-2} - x_{m-1}) + \cdots + b_m (1-x_1)]^{\sum_{k=1}^m \alpha_k}} \quad (\text{C.1.14})$$

C.2 Austauschdiagramme

Wir wollen im folgenden einige Einschleifen-Selbstenergiendiagramme berechnen, die sich als nützlich erweisen. Es handelt sich um den einfachen Fall, wenn die Schleife aus nur zwei Propagatorlinien besteht und Vertices, die insgesamt zu Impulsordnungen $O(p^k)$ mit $k = 0, 1, 2$ im Zähler führen. Dies sind gerade die bei Dyson-renormierbaren Feldtheorien auftretenden Fälle.

Wir definieren die regularisierte Funktion $L_1^{(\text{reg})}$ durch

$$L_1^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0^+)[(l+p)^2 - m_2^2 + i0^+]}, \quad (\text{C.2.1})$$

wobei hier und im folgenden stets die Skala μ der dimensionalen Regularisierung eingeführt wurde, so daß die Kopplungskonstanten in jeder Raum-Zeitdimension $d = 2\omega = 4 - 2\epsilon$ dieselbe Impulsdimension wie bei $d = 4$ besitzen.

Dieses Integral soll (zunächst für $p^2 < 0$) mit dem nach einer Wickrotation berechneten Standardintegral (C.1.2) ausgeführt werden. Dazu schreiben wir (C.2.1) mit einer Feynmanparametrisierung gemäß (C.1.11) und vertauschen die Integrationsreihenfolge, was wegen der Regularisierung erlaubt ist

$$L_1^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{2\epsilon}}{\{(1-x)(l^2 - m_1^2 + i0^+) + x[(l+p)^2 - m_2^2 + i0^+]\}^2}. \quad (\text{C.2.2})$$

Durch eine quadratische Ergänzung läßt sich der Nenner in die Gestalt

$$(l + xp)^2 - M^2 \text{ mit } M^2 = (1-x)m_1^2 + xm_2^2 - x(1-x)p^2 - i0^+ \quad (\text{C.2.3})$$

bringen, und die Anwendung von (C.1.2) führt nach der Laurententwicklung bzgl. ϵ um $\epsilon = 0$ auf

$$L_1^{(\text{reg})}(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) + O(\epsilon). \quad (\text{C.2.4})$$

Das verbleibende Integral läßt sich geschlossen ausführen. Es ist sorgfältig darauf zu achten, daß der

Logarithmus für $s = p^2 < 0$ reelle Werte annimmt. Es folgt

$$L_1(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = -\frac{1}{16\pi^2\epsilon} + \frac{1}{32\pi^2s} \left\{ (2\gamma - 4)s + (m_1^2 - m_2^2) \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right) + 2s \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\ \left. + \lambda(s, m_1, m_2) \left[\ln \left(\frac{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s}{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \left(\frac{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s}{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s} \right) \right] \right\} \quad (\text{C.2.5})$$

Das Integral ist also, wie vom Weinbergtheorem her zu erwarten, logarithmisch divergent. Wir haben weiter die Abkürzung

$$\lambda(s, m_1, m_2) = \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]} \quad (\text{C.2.6})$$

eingeführt.

Das Feynmanintegral (C.2.5) besitzt bei $s = (m_1 + m_2)^2$ einen Verzweigungspunkt, und auf dem physikalischen Blatt der Riemannfläche sind die Hauptwerte der Wurzel und des Logarithmusses (d.h. die Wurzel ist für positive reelle Argumente positiv reell und der Logarithmus reell definiert) zu nehmen. Der Schnitt liegt bei $s > (m_1 + m_2)^2$ entlang der reellen Achse.

Mit denselben Techniken berechnen wir noch zwei weitere Integrale:

$$p^\mu L_2(p^2, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu \mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0^+)[(l+p)^2 - m_2^2 + i0^+]} \quad (\text{C.2.7})$$

ergibt mit

$$L_2(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ \frac{[(m_1^2 - m_2^2)^2 - 2m_2^2 s]}{s^2} \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{2[m_1^2 - m_2^2 + (2 - \gamma)s]}{s} + \frac{(m_1^2 - m_2^2 + s)\lambda(s, m_1, m_2)}{s^2} \right. \\ \left. \times \left[\ln \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s}{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s} \right) - \ln \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s}{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s} \right) \right] \right\} \quad (\text{C.2.8})$$

ein wie zu erwarten linear divergentes Resultat.

Schließlich werten wir noch

$$L_3^{\mu\nu}(p, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu \mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0)[(l+p)^2 - m_2^2 + i0^+]} \quad (\text{C.2.9})$$

aus:

$$L_3^{\mu\nu}(p, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = p^\mu p^\nu L_{31}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) + g^{\mu\nu} L_{32}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) \quad (\text{C.2.10})$$

mit den skalaren Funktionen

$$\begin{aligned}
 L_{31}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = & -\frac{1}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{288\pi^2 s^3} \left\{ s \left[6(m_1^2 - m_2^2)^3 + 3(m_1^2 - 5m_2^2)s + (13 - 6\gamma)s^2 \right] \right. \\
 & + 3 \left[(m_1^2 - m_2^2)^3 + 3m_2^2(m_2^2 - m_1^2)s - 3m_2^2 s^2 \right] \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) - 6s^3 \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi \mu^2} \right) \\
 & + 3 \left[m_1^4 + (m_2^2 - s)^2 + m_1^2(s - 2m_2^2) \right] \lambda(s, m_1, m_2) \\
 & \left. \times \left[\ln \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s}{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s} \right) - \ln \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s}{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{C.2.11}$$

und

$$\begin{aligned}
 L_{32}(s, m_1, m_2, \mu, \epsilon) = & \frac{s - 3(m_1^2 + m_2^2)}{192\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{1152\pi^2 s^2} \\
 & \times \left\{ 6(m_1^2 - m_2^2)^2 s + 6(3\gamma - 7)(m_1^2 + m_2^2)s^2 - 2(3\gamma - 8)s^3 \right. \\
 & - 3 \left[(m_1^2 - m_2^2)^3 - 3(m_1^4 - m_2^4)s \right] \ln \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} \right) + 6s^2 \left[s - 3(m_1^2 + m_2^2) \right] \ln \left(\frac{m_1 m_2}{4\pi \mu^2} \right) \\
 & + 3 \left[m_1^4 + (m_2^2 - s)^2 - 2m_1^2(s + m_2^2) \right] \lambda(s, m_1, m_2) \\
 & \left. \times \left[\ln \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s}{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s} \right) - \ln \left(\frac{m_2^2 - m_1^2 + \lambda(s, m_1, m_2) + s}{m_1^2 - m_2^2 + \lambda(s, m_1, m_2) - s} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{C.2.12}$$

C.3 Austauschdiagramme mit $m_1 = m_2 = m$

Dieselben Integrale für den Fall gleicher Massen in den Propagatoren, also $m_1 = m_2 = m$ lassen sich einfacher neu berechnen als durch die entsprechende Spezialisierung der oben gewonnenen Formeln.

Die Resultate lauten

$$\begin{aligned}
 L_1(s, m, m, \mu, \epsilon) &= -\frac{1}{16\pi^2\epsilon} + \frac{1}{16\pi^2} \left[\gamma - 2 + \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}} \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2-s} - \sqrt{-s}}{\sqrt{4m^2-s} + \sqrt{-s}} \right) \right], \\
 L_2(s, m, m, \mu, \epsilon) &= \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \frac{1}{32\pi^2} \left[2 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}} \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2-s} - \sqrt{-s}}{\sqrt{4m^2-s} + \sqrt{-s}} \right) \right], \\
 L_{31}(s, m, m, \mu, \epsilon) &= -\frac{1}{48\pi^2\epsilon} + \frac{1}{288\pi^2s} \left[12m^2 - 13s + 6\gamma s + 6s \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 6(s-m^2) \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}} \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2-s} - \sqrt{-s}}{\sqrt{4m^2-s} + \sqrt{-s}} \right) \right], \\
 L_{32}(s, m, m, \mu, \epsilon) &= \frac{s-6m^2}{192\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 \right) + \frac{1}{576\pi^2} \left[5s - 24m^2 + 3(6m^2-s) \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3(s-4m^2) \sqrt{\frac{s-4m^2}{s}} \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2-s} - \sqrt{-s}}{\sqrt{4m^2-s} + \sqrt{-s}} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{C.3.1}$$

C.4 Austauschdiagramme mit $m_1 = 0$

Die oben angegebenen Formen der Integrale lassen sich mit Mathematica nicht unmittelbar anwenden, wenn eine oder beide Massen verschwinden. Daher sind die entsprechenden Funktionen gesondert

definiert. Für $m_1 = 0$ und $m_2 = m$ finden wir

$$\begin{aligned}
 L_{10}(s, m, \mu, \epsilon) &= -\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2 - s}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{m^2}{s} \ln \left(\frac{m^2 - s}{m^2} \right) \right], \\
 L_{20}(s, m, \mu, \epsilon) &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \frac{m^2}{s} + \ln \left(\frac{m^2 - s}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{m^4 - 2m^2s}{s^2} \ln \left(\frac{m^2 - s}{m^2} \right) \right], \\
 L_{310}(s, m, \mu, \epsilon) &= -\frac{1}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{288\pi^2 s^3} \left[6m^4 s - 15m^2 s^2 + (13 - 6\gamma)s^3 - 6s^3 \ln \left(\frac{m^2 - s}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 6(m^6 - 3m^4 s + 3m^2 s^2) \ln \left(\frac{m^2 - s}{m^2} \right) \right], \\
 L_{320}(s, m, \mu, \epsilon) &= \frac{s - 3m^2}{192\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{576\pi^2} \left[(9\gamma - 21)m^2 + \frac{3m^4}{s} + (8 - 3\gamma)s - 3(s - 3m^2) \ln \left(\frac{m^2 - s}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3m^4(3s - m^2)}{s^2} \ln \left(\frac{m^2 - s}{m^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{C.4.1}$$

Der Fall für $m = 0$, ergibt sich daraus durch einfache Limesbildung:

$$\begin{aligned}
 L_{100}(s, \mu, \epsilon) &= -\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \left(-\frac{s}{4\pi\mu^2} \right) \right], \\
 L_{200}(s, \mu, \epsilon) &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \gamma - \ln \left(-\frac{s}{4\pi\mu^2} \right) \right], \\
 L_{3100}(s, \mu, \epsilon) &= -\frac{1}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{288\pi^2} \left[13 - 6\gamma - 6 \ln \left(-\frac{s}{4\pi\mu^2} \right) \right], \\
 L_{3200}(s, \mu, \epsilon) &= \frac{s}{192\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{s}{576\pi^2} \left[8 - 3\gamma - 3 \ln \left(-\frac{s}{4\pi\mu^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{C.4.2}$$

C.5 Tadpoles

Für die eichinvariante Behandlung von Eichtheorien ist weiter die Normalordnung im Operatorformalismus zu vermeiden, weil sie die manifeste Eichinvarianz bricht. Die Tadpolebeiträge sorgen dafür, daß die Eichfelder keiner Massenrenormierung bedürfen, was essentiell ist, weil im Wigner-Weyl-Mode (also bei nicht spontan gebrochener Eichsymmetrie) ein Vektorfeld notwendig masselos ist, also auch kein endlicher Gegenterm zulässig ist. Wieder mit Hilfe von (C.1.2) finden wir sofort

$$T_1(m, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{2\epsilon}}{l^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{m^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right]. \tag{C.5.1}$$

Insbesondere für $m \rightarrow 0$ findet sich das bekannte Resultat

$$\lim_{m \rightarrow 0} T_1(m, \mu, \epsilon) = i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{2\epsilon}}{l^2 + i\epsilon} = 0. \tag{C.5.2}$$

Schließlich definieren wir noch

$$\begin{aligned}
 T_2(m_1, m_2, \mu, \epsilon) &= i \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(l^2 - m_1^2 + i0)(l^2 - m_2^2 + i0^+)} \\
 &= -\frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma - \frac{1}{m_1^2 - m_2^2} \left[m_1^2 \ln \left(\frac{m_1^2}{4\pi\mu^2} \right) - m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right\}. \tag{C.5.3}
 \end{aligned}$$

Der Fall $m_1 = m_2 = m$ folgt durch Limesbildung:

$$T_2(m, m, \mu, \epsilon) = -\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right]. \tag{C.5.4}$$

C.5 · Tadpoles

Literaturverzeichnis

- [AGD59] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinskii, *On Application of Quantum Field Theory Methods to Problems of Quantum Statistics at Finite Temperatures*, Sov. Phys. JETP **9**, 636 (1959).
- [BD65] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [BL86] D. Bailin, A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Adam Hilger, Bristol and Boston (1986).
- [BM60] G. Baym, N. D. Mermin, *Determination of Thermodynamic Green's Functions*, J. Math. Phys. **2**, 232 (1960).
- [Bri14] L. Brillouin, *Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien*, Ann. Phys. (Leipzig) **349**, 203 (1914).
<http://dx.doi.org/10.1002/andp.19143491003>
- [CH10] W. Cassing, H. van Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010).
<http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/publ/maphy.pdf>
- [Col86] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1986).
- [Fic79] E. Fick, *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*, 4. Aufl., Aula-Verlag, Wiesbaden (1979).
- [Fra59] E. S. Fradkin, *The Green's function method in quantum statistics*, Nuclear Physics **12**, 465 (1959).
[http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(59\)90021-5](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(59)90021-5)
- [Hee02] H. van Hees, *Introduction to Quantum Field Theory* (2002).
<http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/publ/lect.pdf>
- [Hee03] H. van Hees, *Green's functions* (2003).
<http://cyclotron.tamu.edu/hees/publ/green.pdf>
- [Hee08] H. van Hees, *Statistische Physik* (2008).
<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq-pdf/stat.pdf>
- [Hee09] H. van Hees, *Elektrodynamik und Kausalität*, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2009).
<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/causality/causality.html>

Literaturverzeichnis

- [Hob87] A. Hobson, *Concepts in Statistical Mechanics*, 2. Aufl., Gordon and Breach Science Publishers (1987).
- [Jac83] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 2. Aufl., Walter de Gruyter (1983).
- [Jay57a] E. Jaynes, *Information Theory and Statistical Mechanics*, Phys. Rev. **106**, 620 (1957).
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620>
- [Jay57b] E. Jaynes, *Information Theory and Statistical Mechanics. II*, Phys. Rev. **108**, 171 (1957).
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.171>
- [JO01] J. Jackson, L. Okun, *Historical roots of gauge invariance*, Reviews of Modern Physics **73**, 663 (2001).
<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663>
- [Kap81] J. I. Kapusta, *Bose-Einstein Condensation, Spontaneous Symmetry Breaking, and Gauge Theories*, Phys. Rev. D **24**, 426 (1981).
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.24.426>
- [Kat67] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics*, W. H. Freeman and Company, San Francisco and London (1967).
- [KG06] J. I. Kapusta, C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory; Principles and Applications*, 2. Aufl., Cambridge University Press (2006).
- [Kle03] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*, World Scientific Publishing Company (2003).
- [Kug97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer-Verlag, Heidelberg (1997).
- [LeB96] M. LeBellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1996).
- [Lei75] G. Leibbrandt, *Introduction to the Technique of Dimensional Regularization*, Rev. Mod. Phys. **47**, 849 (1975).
- [LL90] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 8, Elektrodynamik der Kontinua*, 5. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin (1990).
- [MS59] P. C. Martin, J. S. Schwinger, *Theory of many particle systems. I*, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1342>
- [Nac86] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1986).
- [Noe18] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **235** (1918).
- [PB40] W. Pauli, F. J. Belinfante, *On the Statistical Behavior of known and unknown elementary Particles*, Physica **7**, 177 (1940).
- [PS95] M. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publ. Comp. (1995).

Literaturverzeichnis

- [Ram89] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2. Aufl., Addison-Wesley, Redwood City, Calif. (1989).
- [SDM⁺98] J. Schwinger, et al., *Classical Electrodynamics*, The Perseus Books Group (1998).
- [Som07] A. Sommerfeld, *Ein Einwand gegen die Relativtheorie der Elektrodynamik und seine Beseitigung*, Phys. Zeitschr. **8**, 841 (1907).
- [Som14] A. Sommerfeld, *Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien*, Ann. Phys. (Leipzig) **349**, 177 (1914).
<http://dx.doi.org/10.1002/andp.19143491002>
- [Som78] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik IV, Optik*, Verlag Harri Deutsch (1978).
- [SU01] R. U. Sexl, H. K. Urbandtke, *Relativity, Groups, Particles*, Springer, Wien (2001).
- [tV72] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
[http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9)
- [Ueh35] E. A. Uehling, *Polarization effects in the positron theory*, Physical Review **48**, 55 (1935).
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.55>
- [Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Bd. 1, Cambridge University Press (1995).
- [Wei96] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Bd. 2, Cambridge University Press (1996).
- [Wig39] E. P. Wigner, *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*, Annals of Mathematics **40**, 149 (1939).